الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مواضيع لتحضير بكالوريا 2020 من إعداد الأستاذ: زروقي عيسى

الموضـــــوع الـسادس

التمرين الأول:

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1) إذا كان $A(1;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f فإن $f(1-x)=6-f(1+x)$

2) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بــ $g(x)=e^{-x}.\ln(1+2e^{2x})$ فإن $g(x)=\frac{2x}{e^x}+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{e^x}$

3) (v_n)متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=2$ فإن $S_n=v_0^2+v_1^2+v_2^2+....+v_n^2=\left[2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{1-\frac{1}{9}}\right)\right]^2$

4) إذا كان قانون احتمال لمتغير عشوائي X

x_i	-2	0	1	3	5
$P(X=x_i)$	a	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	b	$\frac{3}{13}$

وامله الرياضياتي $E(X)=\frac{17}{13}$ فإن $a=\frac{3}{13}$ و $b=\frac{4}{13}$

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-1-\sqrt{3}i)(z^2+2z+2)=0$

2. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، النقط A ، B ، Cلواحقها : $z_A=-1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=1+\sqrt{3}i$.

أ- اكتب العددان المركبان : z_A و z_C على الشكل الاسي ، استنتج الشكل الاسي لـ z_B .

ب- اكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الاسي

ت- استنتج القيمة المضبوطة لــ : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

3. عين النقطة D لاحقة z_D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع .

4. عين العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد : $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n\in\mathbb{R}$.

5. عين (E_1) و (E_2) مجموعتي النقط M من المستوي ذات اللاحقة حيث : $(E_1):|z+1-i|=|\bar{z}+1-i|$ و $(E_2):\arg(z)=\arg(\bar{z})+\pi+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{R}$

التمرين الثالث:

i. يحتوي كيس U_1 على 9 كريات لا نفرق بينها باللمس 4 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء و كرتان حمرواتان ونسحب عشوائيا وفي أن واحد 3 كريات من الكيس وليكن المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة بالعدد $2n-1$ حيث n عدد الكرات البيضاء المتبقية في الكيس U_1 - عرف قانون احتمال المتغير العشوائي ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$.

ii. يحتوي كيس U_2 على 10 كريات لا نفرق بينها باللمس 7 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء ، نسحب كرية عشوائيا من الكيس U_2 ثم نضعها في الكيس U_1 بعد تسجيل لونها ثم نسحب كرية من الكيس U_1

1. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء .
2. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء.

التمرين الرابع :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x}{x-1}\ln|x-1|$ ، (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

1. احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$، $\lim_{x\to+\infty}f(x)$، $\lim_{x\underset{<}{\to}1}f(x)$، $\lim_{x\underset{>}{\to}1}f(x)$ ثم فسر النهايتين الأخيرتين هندسيا .
2. أ – بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ، ثم بين أن : $f'(x)=\frac{-x}{(x-1)^2}$

   ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها
3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]4;5[$.
4. اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيه كل منهما 2- واكتب معادلتيهما .
5. أرسم المماسين (Δ) و (Δ') والمنحنى (C_f) .
6. ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة : $m(x-1)=2x^2-x-(x-1)\ln|x-1|$
7. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ كما يلي : $h(x)=f(|x|)$

   أ- احسب $\lim_{x\underset{<}{\to}0}\frac{h(x)}{x}$ و $\lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{h(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة h ؟ ثم فسر النتيجة هندسيا .

   ب- بين أن الدالة h زوجية ثم ارسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h في نفس المعلم السابق .
8. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^{-x}\ln(e^x-1)$

   أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن: $g'(x)=e^{-x}f(e^x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

   ب- احسب $\lim_{x\underset{>}{\to}0}g(x)$ و بين أن $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g.

حل الموضــــوع الســادس

التمرين الأول:

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1) إذا كان $A(1;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f فإن $f(1-x)=6-f(1+x)$

الإجابة صحيحة لأنه : إذا كانت $A(1;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) فإنه $f(1-x)+f(1+x)=2(3)$ وهذ يعني أن $f(1-x)=6-f(1+x)$ محققة .

2) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=e^{-x}.\ln\left(1+2e^{2x}\right)$ فإن $g(x)=\dfrac{2x}{e^x}+\dfrac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x}$

الإجابة صحيحة لأنه : من أجل كل عدد حقيقي : $g(x)=e^{-x}.\ln\left(1+2e^{2x}\right)$ يعني أن :

$g(x)=e^{-x}.\ln\left(e^{2x}\left(e^{-2x}+1\right)\right)$ ومنه: $g(x)=e^{-x}.\ln\left(e^{2x}\right)+e^{-x}.\ln\left(e^{-2x}+1\right)$ أي: $g(x)=\dfrac{2x}{e^x}+\dfrac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x}$

3) (v_n)متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=2$ فإن $S_n=v_0^2+v_1^2+v_2^2+....+v_n^2=\left[2\left(\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n+1}}{1-\dfrac{1}{9}}\right)\right]^2$

الإجابة خاطئة لأن : المجموع هو مجموع حدود متتابعة من مربعات متتالية هندسية هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها مربع أساس المتتالية الأولى أي أن : $S_n=v_0^2\dfrac{\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n+1}-1}{\dfrac{1}{9}-1}=4\left[\dfrac{\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n+1}-1}{-\dfrac{8}{9}}\right]=-\dfrac{9}{2}\left[\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n+1}-1\right]$

4) إذا كان قانون احتمال لمتغير عشوائي X

x_i	-2	0	1	3	5
$P(X=x_i)$	a	$\dfrac{2}{13}$	$\dfrac{1}{13}$	b	$\dfrac{3}{13}$

وامله الرياضياتي $E(X)=\dfrac{17}{13}$ فإن $a=\dfrac{3}{13}$ و $b=\dfrac{4}{13}$

الإجابة خاطئة لأنه : لو عوضنا القيمتين في الامل الرياضياتي نجده $\dfrac{22}{13}$ وهو يختلف عن $\dfrac{17}{13}$

$E(X)=-2\left(\dfrac{3}{13}\right)+0\left(\dfrac{2}{13}\right)+\left(\dfrac{1}{13}\right)+3\left(\dfrac{4}{13}\right)+5\left(\dfrac{3}{13}\right)=\dfrac{22}{13}$.

التمرين الثاني:

1. حل المعادلة : $(z-1-\sqrt{3}i)(z^2+2z+2)=0$:

$$(z-1-\sqrt{3}i)(z^2+2z+2)=0$$

$(z-1-\sqrt{3}i)=0$ أو $(z^2+2z+2)=0$

$\boxed{(z=1+\sqrt{3}i)}$ أو $\Delta=b^2-4ac=2^2-4(1)(2)=-4=4i^2$

$\boxed{(z=1+\sqrt{3}i)}$ أو $\boxed{(z_2=-1-i)}$ ، $\boxed{(z_1=-1+i)}$

2. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، النقط A، B، C لواحقها : $z_A=-1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=1+\sqrt{3}i$.

أ- كتابة العددان المركبان : z_A و z_C على الشكل الاسي ،و استنتاج الشكل الاسي لـ z_B:

$Arg(z_A)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi;(k\in\mathbb{Z});|z_A|=\sqrt{2}$ ومنه : $\boxed{z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

$Arg(z_c)=\frac{\pi}{3}+2k\pi;(k\in\mathbb{Z});|z_c|=2$ ومنه : $\boxed{z_A=2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

لدينا : $\boxed{z_B=\overline{z_A}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

ب- كتابة العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الاسي:

الشكل الجبري : $\frac{z_c}{z_A}=\frac{1+\sqrt{3}i}{-1+i}=\frac{1+\sqrt{3}i}{-1+i}\times\frac{-1-i}{-1-i}=\boxed{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}$

الشكل الاسي : $\left|\frac{z_c}{z_A}\right|=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$; $Arg\left(\frac{z_c}{z_A}\right)=Arg(z_c)-Arg(z_A)=\frac{15\pi}{12}+2k\pi;(k\in\mathbb{Z})$ ومنه

$$\boxed{\frac{z_c}{z_A}==\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}}$$

ت- استنتاج القيمة المضبوطة لـــ : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$:

$\frac{z_c}{z_A}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)-i\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ولدينا : $\frac{z_c}{z_A}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ومنه :

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

3. تعيين النقطة D لاحقة z_D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع :

حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع معناه : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ ومنه :

$$z_C-z_A=z_D-z_B \Rightarrow z_D=z_C-z_A+z_B=\left(1+\sqrt{3}i\right)-\left(-1+i\right)+\left(-1-i\right)=\boxed{1+i\left(\sqrt{3}-2\right)}$$

4. تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد : $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n\in\mathbb{R}$:

$$\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}\right)^n=\sqrt{2}^n e^{-i\frac{5n\pi}{12}} \quad \text{ومنه} \quad \sqrt{2}^n e^{-i\frac{5n\pi}{12}}=\sqrt{2}^n\left[\cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)\right]$$

$\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n\in\mathbb{R}$ يكافئ $\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)=0$ ومنه $n=12k'$ حيث $(k'\in\mathbb{N})$.

5. تعيين (E_1) و (E_2) مجموعتي النقط M من المستوي ذات اللاحقة حيث : $(E_1):|z+1-i|=|\overline{z}+1-i|$ و
$(E_2):\arg(z)=\arg\left(\overline{z}\right)+\pi+2k\pi$ **حيث** $k\in\mathbb{R}$

- $|z+1-i|=|\overline{z}+1-i|$ يكافئ $|z-(-1+i)|=|\overline{z}-(-1+i)|$ أي $|z-z_A|=|\overline{z-z_A}|$ ومنه $|z-z_A|=|z-\overline{z_A}|$

ومنه $|z-z_A|=|z-z_B|$ وبالتالي $AM=BM$ ومنه مجموعة النقط (E_1) هي محور القطعة $[AB]$

- $\arg(z)=\arg\left(\overline{z}\right)+\pi+2k\pi$ تكافئ $\arg(z)=-\arg(z)+\pi+2k\pi$ ومنه $2\arg(z)=\pi+2k\pi$

ومنه $\arg(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ وبالتالي مجموعة النقط (E_2) هي محور التراتيب ما عدا المبدأ

التمرين الثالث:

i. تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي وحساب امله الرياضياتي $E(X)$:

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X=2n-1$ ومنه $\{1;3;5;7\}$ حيث n عدد الكرات البيضاء المتبقية في الكيس U_1

x_i	1	3	5	7	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$	$\frac{84}{84}=1$

$$E(X)=1\left(\frac{4}{84}\right)+3\left(\frac{30}{84}\right)+5\left(\frac{40}{84}\right)+7\left(\frac{10}{84}\right)=\frac{4+90+200+70}{84}=\frac{364}{84}$$

ii. 1- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء هو $\frac{1}{5}$.

2- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء هو $\frac{1}{7}$.

التمرين الرابع :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x}{x-1}\ln|x-1|$ ، (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ و تفسير النهايتين الأخيرتين هندسيا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \quad ، \quad \lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(1-(x-1)\ln(x-1)\right)=+\infty$$ لأن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x\ln x=0$

التفسير : المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=1$.

2. أ – التبيين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ،و تبيين أن : $f'(x)=\frac{-x}{(x-1)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ و عليه ودالتها المشتقة هي : $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}=\frac{-x}{(x-1)^2}$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها :

لندرس إشارة $f'(x)$: $f'(x)=0$ يكافئ $\frac{-x}{(x-1)^2}=0$ أي $-x=0$ ومنه $x=0$ ونلخص النتائج في جدول :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;1[\cup]1;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$	↘	$-\infty$

3. التبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]4;5[$.

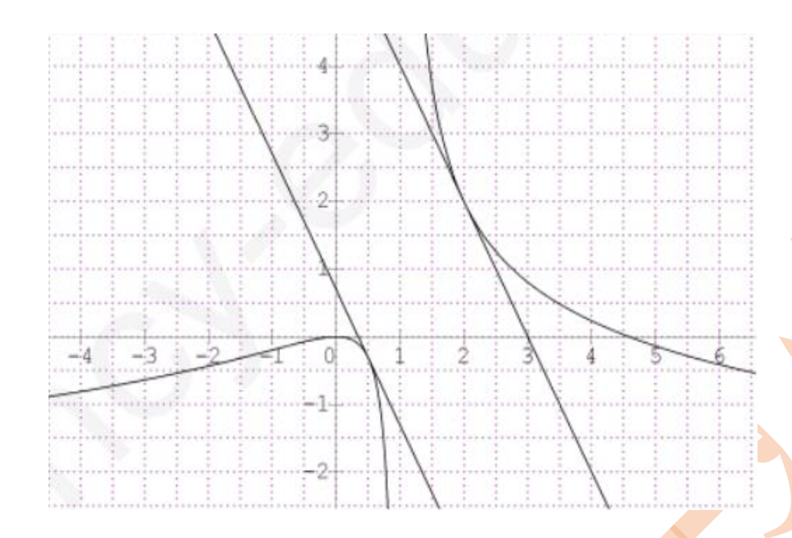
الدالة f مستمرة ورتيبة على $[4;5]$ و لدينا $f(4)=0,2$ ، $f(5)=-0,14$ ومنه $f(4)\times f(5)\prec 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]4;5[$.

4. اثبات المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيه كل منهما 2- واكتب معادلتيهما .

مماسين معامل توجيه كل منهما 2- معناه $f'(x)=-2$ **أي** $\frac{-x}{(x-1)^2}=-2$ بعد الحل نجد $x_1=\frac{1}{2}$ و $x_2=2$

ومنه : $(\Delta):y=-2x+6$ و $(\Delta'):y=-2x+\ln 2$

5. رسم المماسين (Δ) و (Δ') والمنحنى (C_f) .



6. المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة : $m(x-1)=2x^2-x-(x-1)\ln|x-1|$

$$m=\frac{2x^2-2x-(x-1)\ln|x-1|}{(x-1)}$$
$$=\frac{2x-2x}{(x-1)}-\ln|x-1|$$
$$=\frac{2x(x-1)-x}{(x-1)}-\ln|x-1|$$
$$=2x+\frac{x}{(x-1)}-\ln|x-1|$$
$$-2x+m=\frac{x}{(x-1)}-\ln|x-1|$$

ومنه $2x+m=f(x)$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y=-2x+m$

$m\in]-\infty;\ln 2[$ تقبل حلين مختلفين

$m=\ln 2$ تقبل حل مضاعف

$m\in\left]\ln 2;6\right[$ لا تقبل حلول

$m=6$ تقبل حل مضاعف

$m\in\left]6;+\infty\right[$ تقبل حلين مختلفين

7. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ كما يلي : $h(x)=f(|x|)$

أ- حساب $\lim\limits_{x\to 0^{-}}\frac{h(x)}{x}$ **و** $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{h(x)}{x}$ **، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة h ؟ ثم فسر النتيجة هندسيا :**

$$h'(0)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\frac{h(x)}{x}$$ **ومنه** $h'(0)=f'(0)=0$

$$h'(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{h(x)}{x}$$ **ومنه** $h'(0)=f'(0)=0$

نستنتج أن الدالة h تقبل الاشتقاق عند 0 وتقبل مماس أفقي

ب- التبيين أن الدالة h زوجية و ارسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h في نفس المعلم السابق :

لدينا D_h متناظرة بالنسبة للمبدأ ولدينا : $h(-x)=f(|-x|)=f(x)=h(x)$ ومنه h دالة زوجية

8. نعتبر الدالة g المعرفة على $\left]0;+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=e^{-x}\ln\left(e^{x}-1\right)$

أ- التبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن: $g'(x)=e^{-x}f\left(e^{x}\right)$ و الاستنتاج اتجاه تغير الدالة g :

$$\begin{aligned}g'(x)&=e^{-x}f\left(e^{x}-1\right)+\frac{e^{x}}{e^{x}-1}\times e^{x}\\&=e^{-x}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}-1}-\ln\left(e^{x}-1\right)\right)\\&=e^{-x}f\left(e^{x}\right)\end{aligned}$$

ب- حساب $\lim\limits_{x\to 0^{+}}g(x)$ **و التبيين أن** $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ **و تشكيل جدول تغيرات الدالة g:**

دراسة إشارة $e^{-x}f\left(e^{x}\right)$ **:**

لدينا $e^{-x}\succ 0$ نضع $k(x)=f\left(e^{x}\right)$ ومنه الدالة k عبارة عن مركب دالتين $f(x)$ والاسية

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
e^x		$+$	
$k'(x)$		$-$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

ومنه نقطة تقاطعه مع محور الفواصل $k(x)=0$ أي $f(e^x)=0$ يكافئ ومنه $e^x=\alpha$ ومنه $x=\ln\alpha$

جدول الإشارة :

x	0	$\ln\alpha$	$+\infty$
$k(x)$	$+$		$-$

ومنه الدالة g متزايدة تماما في المجال $]-\infty;\ln\alpha]$ ومتناقصة تماما في المجال $[\ln\alpha;+\infty[$

جدول التغيرات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=-\infty$

x	0	$\ln\alpha$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$-$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$ 0

المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) دورة: أوت **2020**

الشعبة: علوم تجريبية إعداد: عبد المطلب

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات **المدة: 3سا و30د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$، $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 2}{n+1}$.

1- احسب الحدود: u_2، u_3 و u_4.

2- **أ)** بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n < 2$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما، واستنتج أنّها متقاربة.

3- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = n(a - u_n)$، حيث $a \in \mathbb{R} - \{2\}$.

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية حسابية أساسها $(a-2)$، يطلب تعيين حدها الأول v_1 .

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n و a، استنتج عبارة u_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

جـ) احسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

4- ليكن المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + ... + nu_n$. بيّن أنّ $S'_n = n(n-1)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على ست كريات بيضاء تحمل الرقم 1 وأربع كريات سوداء تحمل الرقم a، حيث a عدد طبيعي أكبر تماما من 1. نسحب ثلاث كريات في آن واحد بطريقة عشوائية.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة.

1- عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم بيّن أنّ الأمل الرياضياتي $E(X) = \dfrac{9+6a}{5}$.

2- عيّن قيمة للمتغيّر العشوائي X بحيث $[E(X)]^2 = 9E(X)$.

3- نضيف إلى الكيس السابق كريتين حمراوين، ثم نسحب منه كرية واحدة. إذا كانت بيضاء نربح، وإذا كانت سوداء نخسر، أما إذا كانت حمراء فنسحب كرة أخرى من الكيس دون إرجاع الكرة الحمراء وهكذا...

نسمي الحادثة B: سحب كرة بيضاء.

نسمي الحادثة N: سحب كرة سوداء.

نسمي الحادثة R: سحب كرة حمراء.

أ) أنقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه الوضعية.

ب) احسب الاحتمال p_1 للربح واستنتج الاحتمال p_2 للخسارة.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I - **1 -** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2-4z+8=0$.

2 - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ الجملة التالية: $\begin{cases} 2z_1+\overline{z_2}=6 \\ \overline{z_1}+z_2=3+i \end{cases}$.

II - المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A، B ، C و D من هذا المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_\mathrm{A}=2i$ ، $z_\mathrm{B}=3+i$ ، $z_\mathrm{C}=2-2i$ و $z_\mathrm{D}=\overline{z_\mathrm{C}}$.

1 - بيّن أنّ $\dfrac{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{A}-z_\mathrm{B}}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$. استنتج طبيعة المثلث ABC، ثم مثّله.

2 - بيّن أنّ $\dfrac{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}}=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ ، ثم استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر S يطلب تعيين خصائصه.

3 - بيّن أنّ العبارة المركبة للتشابه S الذي يحوّل كل نقطة $\mathrm{M}(z)$ إلى النقطة $\mathrm{M}'(z')$ هي: $z'=(1-i)z-2$.

4 - بيّن أنّ: من أجل كل عدد مركب z ، $z'-z=-i(z-2i)$. استنتج طبيعة المثلث AMM'.

5 - بيّن أنّ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقّق $\mathrm{OM}'=\mathrm{OM}$ هي دائرة $(\mathscr{C})$، مركزها D وتشمل A.

6 - لتكن النقطة I منتصف القطعة $[\mathrm{CD}]$. بيّن أنّ المجموعة (E) للنقط M من هذا المستوي التي تحقّق:
$\|\overrightarrow{\mathrm{MC}}+\overrightarrow{\mathrm{MD}}\|=2\|\overrightarrow{\mathrm{MI}}-\overrightarrow{\mathrm{MA}}\|$ هي صورة الدائرة $(\mathscr{C})$ بالتشابه المباشر S. مثّل $(\mathscr{C})$ والمجموعة (E).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(x)=(x^2-2x)(\ln x-2)+x & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$)

1 - أ) احسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{f(x)}{x}$.

ب) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين؟ فسّر النتيجة بيانيا.

2 - أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ فإنّ $f'(x)=(x-1)(2\ln x-3)$. استنتج إشارة $f'(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3 - أ) (Δ) مستقيم معادلته $y=x$. بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقطع المستقيم (Δ) عند ثلاث نقاط يطلب تعيينها.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ).

4 - أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $3{,}1<\alpha<3{,}2$ و $5{,}5<\beta<5{,}6$.

ب) ارسم المستقيم (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

جـ) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=f(m)$ حلين متمايزين.

5 - g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\left(x^2-2|x|\right)\left(2-\ln|x|\right)-|x|$ لما $x\neq0$ ، و $g(0)=0$.

أ) بيّن أنّ الدالة g زوجية، ثم تأكّد أنّه من أجل كل من المجال $[0;+\infty[$ فإنّ: $g(x)=-f(x)$.

ب) اشرح كيفية رسم البيان $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة g ثم ارسم البيان $(\mathscr{C}')$.

انتهى الموضوع الأول

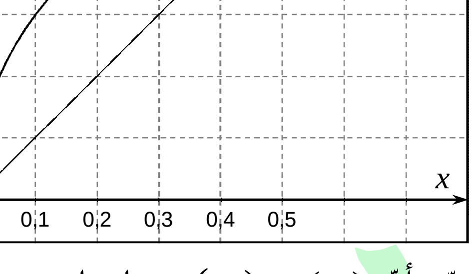
الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$، والمنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f المعرّفة على المجال $[0;0,5]$ بـ: $f(x)=\sqrt{-x^2+x}$. في الشكل أسفله التمثيل لكل من المستقيم (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

1- بيّن أنّ الدالة f متزايدة على المجال $[0;0,5]$.

2- المتتالية العددية المعرّفة بـ: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $u_0=0,1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.



أ) مثّل على حامل محور الفواصل في الوثيقة المرفقة، الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها، مبرزا خطوط الرسم.

ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le 0,5$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

4- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{2}{2u_n+3}$، بيّن أنّ (u_n) و (v_n) متجاورتان.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقطة A من هذا المستوي لاحقتها $z_A=3+3i$ ، ولتكن النقطة B صورة النقطة A بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\dfrac{\pi}{3}$.

1- أ) بيّن أنّ $\dfrac{z_B}{z_A}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$، ثم استنتج طبيعة المثلث AOB.

ب) مثّل النقطة A واستنتج تمثيل النقطة B. (حساب z_B غير مطلوب)

2- أ) اكتب على الشكل الأسي العددين المركبين z_A و z_B .

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب z_B، واستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

جـ) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n=-1$.

3- أ) بيّن أنّ لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل $r\circ r\circ r$ هي $z_C=-z_A$.

ب) بيّن أنّ النقط A، B و C تنتمي إلى الدائرة $(\mathscr{C})$ يطلب تعيين عناصرها المميزة.

جـ) استنتج طبيعة المثلث ABC. أنشئ الدائرة $(\mathscr{C})$ والمثلث ABC.

4- عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي التي تحقّق $\arg\left(\dfrac{z+z_C}{z-z_C}\right)^2=\pi+2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

زهرة نرد حمراء مكعبة أوجهها تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6. زهرة نرد خضراء مكعبة أوجهها تحمل الأرقام 0، 0، 1، 1، 2، 2. نرمي النردين في آن واحد ونسجل الرقمين الظاهرين. جميع الأوجه لها نفس حظوظ الظهور .

1- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية مجموع الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين.

عيّن قانون الاحتمال للمتغير X، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ والتباين $V(X)$.

2- نضع هذين النردين في كيس ونسحب منه عشوائيا نردا واحدا ثم نرميه مرتين متتاليتين. نسمي الحوادث التالية:

الحادثة A: النرد المسحوب أحمر. الحادثة B: النرد المسحوب أخضر. الحادثة C: الرقمين الظاهرين زوجيين.

أنشئ شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية، ثم احسب الاحتمالات التالية: $P(\text{A}\cap\text{C})$، $P(\text{C})$ و $P_{\text{C}}(\text{A})$.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}g(x)$، وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}g(x)=0$ (ضع $t=-\frac{1}{x}$).

2- أثبت أنّ: من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}^*$، $g'(x)=\left(\frac{-2x+1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

3- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا $-1{,}5<a<-1{,}4$. استنتج أنّ $g(x)-1\geq 0$ لما $a\leq x<0$.

II- نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+1+e^{-\frac{1}{x}}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(\text{O};\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$، فسّر بيانيا النتيجة الأخيرة.

2- بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=-x+2$. بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقع أعلى (Δ) لما $x<0$.

3- أ) أثبت أنّ: من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)=g(x)-1$. استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات f .

ب) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

4- أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا b حيث $1{,}5<b<1{,}6$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

ب) بيّن أنّ $f(a)=a^2-a+1$ واستنتج حصرا للعدد $f(a)$.

جـ) ارسم (Δ)، $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=f(-x)$. نأخذ $f(a)\approx 4{,}4$.

5- (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1+e^{-\frac{1}{u_n}}$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $b<u_n\leq 2$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n). استنتج أنّها متقاربة ثم احسب نهايتها.

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح البكالوريا التجريبي 2020 "عبد المطلب" (موضوع 14)

تمرين 1:

1) $u_2=\frac{u_1+2}{2}=1$ ، $u_3=\frac{2u_2+2}{3}=\frac{4}{3}$ و $u_4=\frac{3}{2}$

2) أ) $n=0$: $u_n<2$ ، $u_1=0$ ومنه $u_1<2$ (محققة)

نفرض أن $u_n<2$ ونبرهن أن $u_{n+1}<2$. لدينا: $u_n<2$

$nu_n<2n$ ، $nu_n+2<2n+2$ ، $\frac{nu_n+2}{n+1}<\frac{2n+2}{n+1}$

$u_{n+1}<2$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n<2$.

ب) $u_{n+1}-u_n=\frac{nu_n+2}{n+1}-u_n=\frac{nu_n+2-nu_n-u_n}{n+1}=\frac{2-u_n}{n+1}$

لدينا: $u_n<2$ ، $-u_n>-2$ ، $2-u_n>0$ ومنه: $u_{n+1}-u_n>0$ ، إذن (u_n) متزايدة.

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) أ) $v_{n+1}=(n+1)(a-u_{n+1})=(n+1)\left(a-\frac{nu_n+2}{n+1}\right)$

$v_{n+1}=(n+1)\left(\frac{an+a-nu_n-2}{n+1}\right)=an+a-nu_n-2$

$v_{n+1}-v_n=an+a-nu_n-2-(na-nu_n)=a-2$

ومنه: (v_n) متتالية حسابية أساسها: $r=a-2$ و $v_1=a$.

ب) $v_n=v_1+(n-1)r=a+(n-1)(a-2)=(a-2)n+2$

$v_n=n(a-u_n)$ ومنه: $u_n=a-\frac{v_n}{n}$

الحد العام: $u_n=a-\frac{(a-2)n+2}{n}=2-\frac{2}{n}$

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{2}{n}\right)=2$

جـ) $S_n=\frac{n}{2}(v_1+v_n)=\frac{n}{2}\left(a+(a-2)n+2\right)=\frac{n}{2}\left[(a-2)n+a+2\right]$

4) لدينا: $u_n=2-\frac{2}{n}$

$S'_n=u_1+2u_2+3u_3+\dots+nu_n$

$S'_n=\left(2-\frac{2}{1}\right)+2\left(2-\frac{2}{2}\right)+3\left(2-\frac{2}{3}\right)+\dots+n\left(2-\frac{2}{n}\right)$

$S'_n=(2-2)+(2\times2-2)+(3\times2-2)+\dots+2n-2$

$S'_n=2(1+2+3+\dots+n)-2-2-2+\dots-2$

$S'_n=2\frac{n(n+1)}{2}-2n=n^2+n-2n=n^2-n$

يمكن حساب مجموع متتالية حسابية حدها العام nu_n .

تمرين 2:

1) $X=\{3;2+a;1+2a;3a\}$

$P(X=3)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$

$P(X=2+a)=\frac{C_6^2\times C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$

$P(X=1+2a)=\frac{C_6^1\times C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$

$P(X=3a)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$

$E(X)=3\times\frac{1}{6}+(2+a)\left(\frac{1}{2}\right)+(1+2a)\left(\frac{3}{10}\right)+3a\times\frac{1}{30}$

$E(X)=\frac{6a+9}{5}$

2) $[E(X)]^2-9E(X)=0$ أي: $E(X)[E(X)-9]=0$

$E(X)=0$ (مستحيل) أو $E(X)=9$ ومنه:

$\frac{9+6a}{5}=9$ ومنه: $a=6$

3) أ)

- R ($2/12$)
  - R ($1/11$)
    - N ($4/10$)
    - B ($6/10$)
  - N ($4/11$)
  - B ($6/11$)
- N ($4/12$)
- B ($6/12$)

ب) $P_1=\frac{6}{12}+\frac{2}{12}\times\frac{6}{11}+\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=0,6$

$P_2=1-P_1=\frac{2}{5}=0,4$

تمرين 3:

I - 1) $z^2-4z+8=0$

$\Delta=-16=16i^2=(4i)^2$

$z_1=2-2i$ و $z_2=2+2i$ (مترافقين)

2) $\begin{cases}2z_1+\bar z_2=6\\ \bar z_1+z_2=3+i\end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases}2\bar z_1+z_2=6\\ \bar z_1+z_2=3+i\end{cases}$

بالطرح: $\bar z_1=3-i$ ومنه: $z_1=3+i$

$z_2=6-2\bar z_1$ ومنه: $z_2=2i$

II - 1) $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-1-3i}{-3+i}=\frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\frac{|z_C-z_B|}{|z_A-z_B|}=\frac{BC}{BA}=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=(\vec{BA},\vec{BC})=\frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

2) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2-4i}{3-i}=1-i=\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$

$z_C-z_A=\sqrt{2}e^{i(-\pi/4)}(z_B-z_A)$

ولدينا: $z'-w=re^{i\theta}(z-w)$

ومنه: C هي صورة B بالتشابه المباشر S ، الذي مركزه A ، نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$.

3) $z'=az+b$ ، حيث: b هو لاحقة المركز A :

$a=\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)=1-i$ و $\frac{b}{1-a}=z_A$

أي: $b=-2$ ومنه: $z'=(1-i)z-2$

4) $z'=(1-i)z-2$ أي: $z'=z-iz-2$

$z'-z=-iz-2$ ومنه: $z'-z=-i(z-2i)$

$\frac{z'-z}{z-2i}=\frac{z'-z}{z-z_A}=-i=e^{i(-\pi/2)}$

$\frac{|z'-z|}{|z-z_A|}=\frac{MM'}{AM}=1$ و $\arg\left(\frac{z'-z}{z-z_A}\right)=(\vec{AM},\vec{MM'})=-\frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث AMM' مثلث قائم ومتساوي الساقين

5) $OM'=OM$ تكافئ $|z'|=|z|$

$|(1-i)z-2|=|z|$

$|(1-i)(x+iy)-2|=|x+iy|$

$|(x+y-2)+i(-x+y)|=|x+iy|$

$\sqrt{(x+y-2)^2+(y-x)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$ ، دائرة مركزها $D(2,2)$ ونصف قطرها $DA=2$ ، $(\mathcal{C})$ هي الدائرة التي مركزها D وتشمل A أي نصف قطرها $r=DA=2$

6) $z_I=\frac{z_C+z_D}{2}=2$

صورة D بالتحويل S :

$z'=(1-i)z_D-2=2=z_I$

وبما أن A صامدة ، منه صورة الدائرة $(\mathcal{C})$ هي الدائرة التي مركزها I وتشمل A أي نصف قطرها $IA=\sqrt{2}\,AD=2\sqrt{2}$

$\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=2\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MA}\|$

$\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\|=2\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MI}\|$

$\|2\overrightarrow{MI}+\underbrace{\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}}_{\vec{0}}\|=2\|\overrightarrow{AI}\|$

$MI=AI$

(E) هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $r=AI=2\sqrt{2}$.

تمرين 4 :

1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x(x-2)(\ln x-2)+x]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x[(x-2)(\ln x-2)+1]}{x}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين .
$(\mathcal{C})$ يقبل نصف مماس عمودي (يوازي $y'oy$)

2) أ) $f'(x)=(2x-2)(\ln x-2)+\frac{1}{x}(x^2-2x)+1$

$f'(x)=2(x-1)(\ln x-2)+(x-1)=(x-1)(2\ln x-3)$

$f'(x)=0$ لما $x=1$ أو $\ln x=\frac{3}{2}$ أي $x=e^{3/2}$.

0		1		$e^{3/2}$	
	+	0	−	0	+

ب) $1\leq x\leq e^{3/2}$: f متناقصة
$x\in]0;1[\cup]e^{3/2};+\infty[$ f متزايدة .

x	0		1		$e^{3/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	3	↘	−1,1	↗	$+\infty$

3) أ) $f(x)=x$ يعني : $x(x-2)(\ln x-2)=0$
$A(0,0)$ ، $B(2;2)$ و $C(e^2,e^2)$

ب) لدراسة "وضعية" $(\mathcal{C})$ بالنسبة لـ (Δ) ، ندرس إشارة $(f(x)-x)$

x	0		2		e^2		$+\infty$
$x-2$		−	0	+		+	
$\ln x-2$		−		−	0	+	
$f(x)-x$	0	+	0	−	0	+	

$(\mathcal{C})$ أعلى (Δ) لما $x\in]0,2[\cup]e^2,+\infty[$
$(\mathcal{C})$ أسفل (Δ) لما $x\in]2,e^2[$
$(\mathcal{C})$ يقطع (Δ) عند A ، B و C المذكورة سابقا .

4) أ) f مستمرة ومتناقصة على المجال $]3,1;3,2[$.
$f(3,1)\simeq 0,138>0$ و $f(3,2)\simeq -0,014<0$:
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,1<\alpha<3,2$.

f مستمرة ومتزايدة على المجال $]5,5;5,6[$:
$f(5,5)\simeq -0,184<0$ و $f(5,6)\simeq 0,011>0$
ومنه حسب القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $5,5<\beta<5,6$.

ب) رسم المنحني $(\mathcal{C})$ والمستقيم (Δ) .

جـ) $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين
لما : $f(e^{3/2})<f(m)<0$ ومنه : $\alpha<m<\beta$
$m\neq e^{3/2}$

5) أ) $g(-x)=((-x)^2-2|-x|)(2-\ln|-x|)-|-x|$
$g(-x)=(x^2-2|x|)(2-\ln|x|)-|x|=g(x)$
ومنه g زوجية .

لما $x\geq 0$ ، $|x|=x$ ومنه : $g(x)=(x^2-2x)(2-\ln x)-x$
$g(x)=-[(x^2-2x)(\ln x-2)+x]=-f(x)$

ب) لما $x\geq 0$: $g(x)=-f(x)$ ومنه $(\mathcal{C}')$ يناظر $(\mathcal{C})$ بالنسبة لمحور الفواصل ولما $x<0$ ، بما أن g زوجية ، فإن $(\mathcal{C}')$ يقبل كمحور تناظر حامل محور التراتيب

تتمة : باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن :
$\int_1^{e^2}(x^2-2x)(\ln x-2)\,dx=\frac{9e^4-2e^6-31}{18}$ ثم احسب المساحة A للحيز المستوي المحدد بـ $(\mathcal{C})$ والمستقيمات $y=x$ ، $x=1$ و $x=e^2$.

نضع : $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(x)=\frac{x^3}{3}-x^2\end{cases}$ $\begin{cases}u(x)=\ln x-2\\ v'(x)=x^2-2x\end{cases}$

$\int_1^{e^2}(x^2-2x)(\ln x-2)\,dx=\left[(\ln x-2)\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\left(\frac{x^2}{3}-x\right)dx$

$=\left[(\ln x-2)\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right]_1^{e^2}-\left[\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{2}\right]_1^{e^2}=\frac{9e^4-2e^6-31}{18}$

$A=\int_1^{e^2}(x-f(x))\,dx=-\int_1^{e^2}(x^2-2x)(\ln x-2)\,dx\simeq 19,25\ ua$

تصحيح البكالوريا التجريبي 2020م موضوع 4

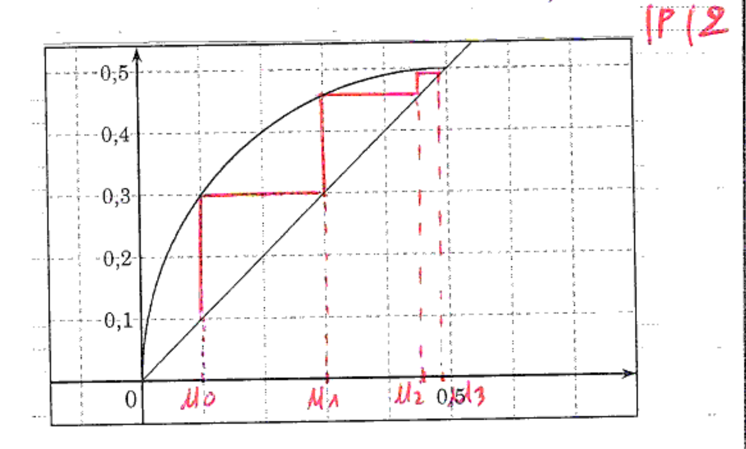
تمرين 1:

1) $f(x)=\sqrt{-x^2+x}$ ومنه: $f'(x)=\frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}} \geq 0$

لأن: لما $0 \leq x \leq 0,5$ ، $-1\leq -2x \leq 0$ ، $0\leq -2x+1 \leq 1$

إذن f متزايدة على $[0;0,5]$.

2) أ)



ب) (U_n) متزايدة لأن $U_3>U_2>U_1>U_0$ ، ومتقاربة نحو $0,5$.

3) أ) $0<U_n\leq 0,5$. $n=0$: $U_0=0,2$ (محققة)

نفرض أن $0<U_n\leq 0,5$ ونبرهن أن $0\leq U_{n+1}\leq 0,5$

لدينا: $0<U_n\leq 0,5$ وبما أن f متزايدة فإن $f(0)\leq f(U_n)\leq f(0,5)$ أي $0\leq U_{n+1}\leq 0,5$ ،

ومنه $0<U_n\leq 0,5$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

ب) $U_{n+1}-U_n=\frac{(\sqrt{-U_n^2+U_n}-U_n)(\sqrt{-U_n^2+U_n}+U_n)}{(\sqrt{-U_n^2+U_n}+U_n)}$

لأن: $U_{n+1}-U_n=\frac{U_n(-2U_n+1)}{\sqrt{-U_n^2+U_n}+U_n}\geq 0$ ؛ لما $0<U_n\leq 0,5$ ، $0\leq -2U_n+1\leq 1$

ومنه (U_n) متزايدة.

جـ) (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة. $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1}=\lim_{n\to+\infty} U_n=\ell$ ومنه $\sqrt{-\ell^2+\ell}=\ell$

بالتربيع: $2\ell^2-\ell=0$. إما $\ell=0$ (مرفوض) لأنها متزايدة أو $\ell=\frac{1}{2}$

4) لنبين أن (V_n) متناقصة: لدينا $U_{n+1}\geq U_n$

$2U_{n+1}\geq 2U_n$ ، $2U_{n+1}+3\geq 2U_n+3$ ومنه $\frac{1}{2U_{n+1}+3}\leq\frac{1}{2U_n+3}$

$\frac{2}{2U_{n+1}+3}\leq\frac{2}{2U_n+3}$ يعني $V_{n+1}\leq V_n$ ومنه (V_n) متناقصة

$\lim_{n\to+\infty} V_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{2U_n+3}=\frac{1}{2}$ لأن $\lim_{n\to+\infty} U_n=\frac{1}{2}$ ،

(U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة ولهما نفس النهاية إذن متجاورتان.

تمرين 2:

1) أ) العبارة المركبة للدوران r: $z'-w=e^{i\theta}(z-w)$

بما أن B هي صورة A بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ إذن: $z_B-z_O=e^{i(-\frac{\pi}{3})}(z_A-z_O)$ ومنه: $z_B=e^{i(-\frac{\pi}{3})}z_A$ أي: $z_B/z_A=e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

$\frac{|z_B|}{|z_A|}=\frac{OB}{OA}=1$ و $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=(\vec{OA},\vec{OB})=-\frac{\pi}{3}$

ومنه المثلث ABO متقايس الأضلاع.

ب) B هي صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

2) أ) $z_A=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_B=e^{i(-\frac{\pi}{3})}\times z_A$

$=e^{i(-\frac{\pi}{3})}\times 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$

ومنه: $z_B=3\sqrt{2}e^{i(\frac{-\pi}{12})}$

أو: $\arg(z_B)=(\vec{u};\vec{OB})=(\vec{u},\vec{OA})+(\vec{OA},\vec{OB})=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{12}$

و $|z_B|=OB=OA$

ب) $z_B=(3+3i)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3+3\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{3-3\sqrt{3}}{2}$

$z_B=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12}+i\sin\frac{-\pi}{12}\right)$

$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{3+3\sqrt{3}}{2\times3\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\frac{\pi}{12}=\frac{3-3\sqrt{3}}{2\times3\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

ومنه: $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

جـ) $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{3}}$ و $-1=e^{i\pi}$

ومنه: $\frac{n\pi}{3}=\pi+2k\pi$ ؛ $n=3+6k$ $(k\in\mathbb{N})$

3) أ) $r\circ r: z'=e^{i(-\frac{\pi}{3})}\times e^{i(-\frac{\pi}{3})}z=e^{i(-\frac{2\pi}{3})}z$

$r\circ r\circ r: z'=e^{i(-2\pi/3)}\times e^{i(-\pi/3)}z=e^{i(-\pi)}z$

ومنه: $z_C=e^{i\pi}z_A=-z_A$

ب) $OA=OB=OC$ ، دائرة مركزها O و $r=3\sqrt{2}$.

جـ) بما أن C نظيرة A بالنسبة لـ O، فإن $[AC]$ هو قطر الدائرة، إذن المثلث ABC قائم في B.

4) $z_C=-z_A$ ومنه: $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right)^2=\pi+2k\pi$

$2\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right)=\pi+2k\pi$ ومنه $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$(\vec{CM},\vec{AM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$

(Γ) هي دائرة قطرها $[AC]$ ماعدا A و C.

تمرين 3:

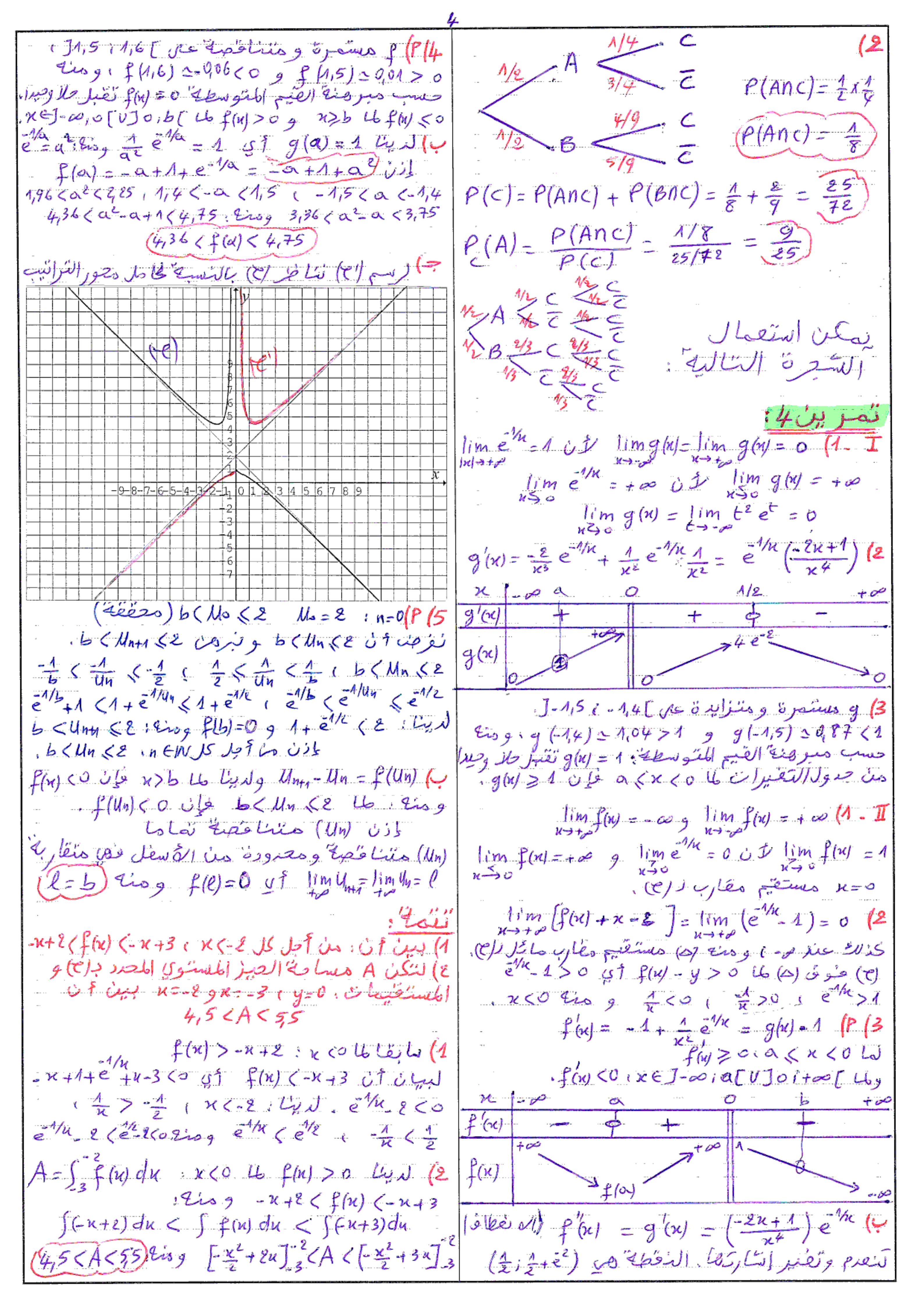
	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8

1) قيم المتغير العشوائي X هي: $\{8,7,6,5,4,3,2,1\}$

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

$E(X)=\frac{9}{2}=4,5$

$V(X)=\frac{143}{6}-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{43}{12}$



2) الشجرة: A ($\frac12$) : C ($\frac14$) ، $\bar C$ ($\frac34$) ؛ B ($\frac12$) : C ($\frac49$) ، $\bar C$ ($\frac59$)

$P(A\cap C)=\frac12\times\frac14$

$P(A\cap C)=\frac18$

$P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)=\frac18+\frac29=\frac{25}{72}$

$P_C(A)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{1/8}{25/72}=\frac{9}{25}$

يمكن استعمال الشجرة التالية :

تمرين 4 :

I. 1) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ لأن $\lim_{|x|\to+\infty} e^{-1/x}=1$

$\lim_{x\to0^-} g(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to0^-} e^{-1/x}=+\infty$

$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{t\to-\infty} t^2e^t=0$

2) $g'(x)=-\frac{2}{x^3}e^{-1/x}+\frac{1}{x^2}e^{-1/x}\frac{1}{x^2}=e^{-1/x}\left(\frac{-2x+1}{x^4}\right)$

x	$-\infty$		a		0		$\frac12$		$+\infty$
$g'(x)$		+	+	+	||	+	0	−	
$g(x)$	0	↗	1	↗ $+\infty$	|| 0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

3) g مستمرة ومتزايدة على $]-1,5;-1,4[$ و $g(-1,5)\simeq0,87<1$ و $g(-1,4)\simeq1,04>1$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا.
من جدول التغيرات لما $a<x<0$ فإن $g(x)\geq1$.

II. 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=1$ لأن $\lim_{x\to0^+} e^{-1/x}=0$ و $\lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty$

$x=0$ مستقيم مقارب لـ (C).

2) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x-2]=\lim_{x\to+\infty}(e^{-1/x}-1)=0$

كذلك عند $-\infty$ ، ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C)

(C) فوق (Δ) لما $f(x)-y>0$ أي $e^{-1/x}-1>0$ ، $e^{-1/x}>1$ ، $-\frac1x>0$ ، $\frac1x<0$ ومنه $x<0$.

P3) $f'(x)=-1+\frac{1}{x^2}e^{-1/x}=g(x)-1$

لما $a\leq x<0$ ، $f'(x)\geq0$ ، ولما $x\in]-\infty;a[\cup]0;+\infty[$ ، $f'(x)<0$.

x	$-\infty$		a		0		b		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	||	−	−	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(a)$	↗ $+\infty$	|| 1	↘	0	↘	$-\infty$

ب) $f''(x)=g'(x)=\left(\frac{-2x+1}{x^4}\right)e^{-1/x}$ (نقطة الانعطاف)

تنعدم وتغير إشارتها، النقطة هي $(\frac12;\frac12+e^{-2})$

P4) f مستمرة ومتناقصة على $]1,5;1,6[$ ، $f(1,5)\simeq0,01>0$ و $f(1,6)\simeq-0,06<0$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا.
$f(x)\leq0$ لما $x\geq b$ و $f(x)>0$ لما $x\in]-\infty,0[\cup]0,b[$.

ب) لدينا $g(a)=1$ أي $\frac{1}{a^2}e^{-1/a}=1$ ومنه $e^{-1/a}=a^2$

إذن $f(a)=-a+1+e^{-1/a}=-a+1+a^2$

$-1,5<a<-1,4$ ، $1,4<-a<1,5$ ، $1,96<a^2<2,25$

$3,36<a^2-a<3,75$ ومنه $4,36<a^2-a+1<4,75$

$4,36<f(a)<4,75$

جـ) رسم (C') نظير (C) بالنسبة لحامل محور التراتيب

P5) $n=0$: $u_0=2$ ، $b<u_0\leq2$ (محققة)

نفرض أن $b<u_n\leq2$ ونبرهن أن $b<u_{n+1}\leq2$.

$b<u_n\leq2$ ، $\frac12\leq\frac{1}{u_n}<\frac1b$ ، $-\frac1b<-\frac{1}{u_n}\leq-\frac12$

$e^{-1/b}<e^{-1/u_n}\leq e^{-1/2}$ ، $e^{-1/b}+1<1+e^{-1/u_n}\leq1+e^{-1/2}$

لدينا: $1+e^{-1/2}<2$ و $f(b)=0$ ومنه: $b<u_{n+1}\leq2$

إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $b<u_n\leq2$.

ب) $u_{n+1}-u_n=f(u_n)$ ولدينا لما $x>b$ فإن $f(x)<0$

ومنه: لما $b<u_n\leq2$ فإن $f(u_n)<0$.

إذن (u_n) متناقصة تماما

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$\lim_{+\infty} u_{n+1}=\lim_{+\infty} u_n=\ell$ أي $f(\ell)=0$ ومنه $\ell=b$

تتمة :

1) بين أن: من أجل كل $x<-2$ ، $-x+2<f(x)<-x+3$

2) لتكن A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C) و المستقيمات: $y=0$ ، $x=-3$ و $x=-2$ بين أن

$4,5<A<5,5$

1) سابقا لما $x<0$: $f(x)>-x+2$

لنبين أن $f(x)<-x+3$ أي $-x+1+e^{-1/x}+x-3<0$

لدينا: $x<-2$ ، $\frac1x>-\frac12$ ، $e^{-1/x}-2<0$.

$-\frac1x<\frac12$ ، $e^{-1/x}<e^{1/2}$ ومنه $e^{-1/x}-2<e^{1/2}-2<0$

2) لدينا $f(x)>0$ لما $x<0$: $A=\int_{-3}^{-2}f(x)\,dx$

$-x+2<f(x)<-x+3$ ومنه:

$\int(-x+2)dx<\int f(x)dx<\int(-x+3)dx$

$\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-3}^{-2}<A<\left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{-2}$ ومنه $4,5<A<5,5$





الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات

قسم 03 رياضيات

المدة : 4 سا و 30 د

دورة ماي 2022

الموضوع الاول

التمرين الاول :

عين في كل حالة الاقتراح الصحيح من بين لاقتراحات (أ) ، (ب) ، (ج) و (د) (التبرير مطلوب)

1) الكتابة المبسطة للعدد A المعرف ب : $A= \ln (e + e^{-1} + 2) - 2\ln (e + 1)$ هي :

أ) $A=0$ ، ب) $A=1$ ، ج) $A=-1$ ، د) $A=e$

2) من اجل كل عدد حقيقي x العدد $2x - \ln(e^{x} + 3)$ يساوي :

أ) $3x + \ln (1+3e^{-x})$ ، ب) $x - \ln (1+3e^{-x})$ ، ج) $x + \ln (1+3e^{-x})$ ، د) $3x - \ln (1+3e^{-x})$

3) عدد حلول المعادلة $e^{x} - 3e^{-x} = -2$ في R هو :

أ) 1 ، ب) 2 ، ج) 4 ، د) 0 ،

4) النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{3}{4}\left[\frac{e^{3x}-1}{5x}\right]$ تساوي :

أ) $\frac{3}{4}$ ب) $\frac{3}{5}$ ج) $\frac{5}{3}$ د) $\frac{9}{20}$

5) نعرف من اجل كل عدد طبيعي n المجموع $S= e^{\ln5} + e^{2\ln5} + e^{3\ln5} + ... + e^{n\ln5}$ و منه :

أ) $S= 5^{n+1} -1$ ب) $S=\frac{5}{4}(1-5^{n})$ ج) $S= \frac{1}{4}(1-5^{n+1})$ د) $S= \frac{5}{4}(5^{n+1}-1)$

التمرين الثاني :

1) احسب القاسم المشترك الاكبر للعددين $4^{5}-1$ و $4^{6}-1$

2) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على N ب : $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$

أ) احسب الحدود : u_2 ، u_3 و u_4

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 4U_n + 1$

ت) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان Un عدد طبيعي ، ثم استنتج ($PGCD(U_n ; U_{n+1})$

3) لتكن (V_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$

أ) بين ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول .

ب) اكتب بدلالة العدد الطبيعي n عبارة V_n ثم عبارة U_n

ت) عين من اجل كل عدد طبيعي n : $PGCD(4^{n+1} - 1 ; 4^n-1)$

التمرين الثالث :

1) نعتبر في المجموعة Z^2 المعادلة (E) ذات المجهول $(x ;y)$حيث : $4x - 9y =5$

أ) بين انه اذا كانت الثنائية $(x ;y)$ حلا للمعادلة (E) فان : $x \equiv 8[9]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

ب) αعدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في نظام التعداد الذي اساسه x و يكتب $\overline{98}$ في نظام التعداد الذي اساسه y حيث $x \leq 35$ و $y\leq 15$

أ) عين القيم الممكنة ل x و y ثم اكتب α في النظام العشري

ب) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 9

2) عين الثنائيات $(x ;y)$ من N^2 حلول المعادلة (E) حيث : $2011^x + 4^y + 7 \equiv 0[9]$

أ) نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث : $a=9n+8$ و $b=4n+3$ و ليكن d قاسمهما المشترك الاكبر حيث n عدد طبيعي

.

ب) ما هي القيم الممكنة ل d

ت) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d=5$

3) من احل كل عدد طبيعي n ، نضع $A= 9n^2 + 17n + 8$ و $B=4n^2 + 7n +3$

أ) بين ان العدد (n+1) يقسم كل من A و B

ب) استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين A و B

التمرين الرابع :

I. لتكن الدالة u المعرفة على $]0 ; +\infty[$ ب : $u(t) = 3\ln (1+t) - \frac{t}{1+t}$

عين اتجاه تغيرالدالة u :

$$\begin{cases} f(x) = x3[ln(1+x) - \ln x] ; x\epsilon]0 ; 1] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) ليكن الدالة f المعرفة على [0 ;1] ب :

اثبت ان f قابلة للاشتقاق علي يمين 0

تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي $x\epsilon]0 ;1]$ $f'(x) = x^2u(\frac{1}{x})$

عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

II. نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على [0 ;1] ب :

{ $g(x) = x^3 \ln(x+1)$ $x \in]0;1[$

{ $h(0) = 0$

و ليكن على الترتيب (C_f) ، (C_g) و (C_h) منحنيات الدوال f ، g و h في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\| = 4cm$

أ) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x من [0 ,1] : $f(x) = g(x) - h(x)$

ب) عين الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_g)

1) ليكن (T) و (T') مماسين ل (C_f) و (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $e^{-\frac{1}{3}}$ على الترتيب

اثبت ان (T) و (T') متوازيان

2) انشئ المنحنى (C_f)

3) لتكن H الدالة الاصلية الوحيدة ل h على المجال [0 ,1] و التي تنعدم عند 1

ليكن $\alpha \in]0;1]$ و $A\alpha = \int_{\alpha}^{1} x^3 \ln x \, dx$ عبر عن $A\alpha$ بدلالة الدالة H

احسب $A\alpha$ باستعمال التكامل بالتجزئة ثم استنتج H(0)

4) عين مساحة الحيز من المستوي المحدة بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين ذو المعادلتين x=0 و x=1

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7.

ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد $2017^{4n+2} + 2x2019^{6n+4}$ على 7

2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x وy: $343x-648y= 76 \ldots(E)$

أ- بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في Z^2

ب- حل في Z^2 المعادلة (E).

3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير معدومين x وy غير حلول المعادلة (E).

أ- ماهي القيم الممكنة للعدد d.

ب- عين الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d= 76$.

4) عدد طبيعي يكتب $\beta 1 \alpha \beta$ في نظام التعداد ذي الأساس 7، ويكتب $\alpha 1 \alpha \alpha \beta$ في نظام التعداد ذي الأساس 5.

جد العددين α و β ، ثم أكتب γ في النظم التعداد ذي الأساس 6.

التمرين الثاني: (04 نقاط).

يحتوي كيس غير شفاف عل أربع كريات حمراء تحمل الأرقام: 0، 0، 1، 2 وأربع كريات خضراء تحمل الأرقام 1، 1، 1، 2 وكرتين سوداوين تحملان الرقمين 1، 2.(وكل الكريات متماثلة ولا يمكن التمييز بينها عند لمسها).

- نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كرايات على التوالي بدون إرجاع:
- نعتبر الأحداث التالية:

A: الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون.

B: الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم.

C: الحصول على ثلاث كريات جداء الأرقام المسجلة عليها غير معدوم.

1- احسب الاحتمالات التالية: $P(A)$، $P(B)$، $P(A \cap B)$، $P(AUB)$، و $P(C)$

2- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل تجربة جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة.

- حدد قيم X الممكنة، ثم عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

3- احسب الاحتمال: $P(e^{x2-x} > 1)$.

التمرين الثالث:

(U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0=\frac{7}{4}$، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+\frac{3}{8}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n>\frac{3}{4}$

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)، ثم استنتج أنها متقاربة؟

2) (V_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما $Vn=\alpha(\frac{3}{4})^n(U_n-\frac{\alpha}{4})$

أ- عين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

ب- من أجل $\alpha=3$ عبر عن V_n بدلالة n.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n $U_n=t_n+\frac{3}{4}$ حيث (t_n) متتالية هندسية ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} Un$

4) أ- عبر عن P_n بدلالة n حيث: $P_n=u_0v_0+u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_nv_n$

ب- أكتب S_n بدلالة n حيث: $S_n=\frac{V_0}{U_0-\frac{3}{4}}+\frac{1}{U_1-\frac{3}{4}}+\ldots+\frac{V_n}{U_n-\frac{3}{4}}$

التمرين الرابع:

الجزء الأول: الدالة g معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x^3-1+2\ln x$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$

2- برر وجود عدد حقيقي $g(\alpha)=0$. ثم اوجد قيمة مقربة لـα مدور إلى 10^{-3}

الجزء الثاني:الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ $f(x)=2x-\frac{lnx}{2}$

(C_f)منحنيf في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ بحيث $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm)$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

2- أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و(Δ) ذو المعادلة $y=2x$

3- أ- بين أنه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

ت- شكل جدول التغيرات الدالة f

4- أرسم (Δ) و(C_f)

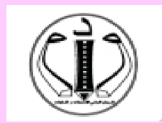
الجزء الثالث: ليكن n عدد طبيعي غير معدوم وليكنI_nالحيز من المستوي المحصور بين المنحنى (c_f) و(Δ) والمستقيمين ذو المعادلتين $x=1$ و$x=n$

1- برر أن هذه المساحة معطاة بـ: $In=\int_1^n\frac{lnx}{x^2}dx$

2- أ- تأكد أن الدالة $F: x \mapsto \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$ هي دالة اصلية للدالة $x \mapsto \frac{lnx}{x^2}$ على المجال $]0 ; +\infty[$

ت- استنتج عبارة I_n بدلالة n

3- احسب نهاية المساحة I_n لما n تؤول إلى $+\infty$



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول :

التمرين الأول:(06 نقاط)

I) -1)- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7 ، ثم استنتج باقي قسمة العدد A على 7

حيث : $A = 5^{2022} + 1443$.

2)- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $222^n + 4 \times 5^n + 337$ قابلا للقسمة على 7 .

3)- B عدد طبيعي غير معدوم مكتوب في النظام ذو الأساس 10 كما يلي : $B = \overline{20xx}$

- عين قيم العدد الطبيعي x الذي يحقق : $B \equiv 6[7]$.

II) -1)- تحقق أن العدد 337 أولي .

2)- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $14x - 337y = 2022.......(1)$

أ)- تحقق أن المعادلة (1) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ ب)- حلل العدد 2022 إلى جداء عوامل أولية .

جـ)- بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 337 ، ثم استنتج حلول المعادلة (1).

د)- عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق : $x \times y - 2696 = 0$

التمرين الثاني:(06 نقاط)

1)- (C) هو التمثيل البياني للدالة f على المجال : $[0, +\infty[$ المعرفة بـ : $f(x) = x^2 - 2x + 2$

(كما هو موضح في الوثيقة المرفقة)

- لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

أ)- مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى لهذه المتتالية .

ب)- ضع تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب هذه المتتالية .

جـ)- باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع أثبت أنه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $1 \prec U_n \prec 2$

د)- ادرس اتجاه تغير المتتالية $\left(U_n\right)$ ، ماذا نستنتج ؟ - أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2)- لتكن المتتالية $\left(V_n\right)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = Ln\left(U_n - 1\right)$.

أ)- أثبت أن المتتالية $\left(V_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها. (لاحظ أن: $U_n^2 - 2U_n + 2 = \left(U_n - 1\right)^2 + 1$)

ب)- عين حدها الأول V_0 . أكتب V_n ، U_n بدلالة n ثم أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

جـ)- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \log\left(\sqrt{U_0 - 1}\right) + \log\left(\sqrt{U_1 - 1}\right) + \ldots\ldots + \log\left(\sqrt{U_n - 1}\right)$

- أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

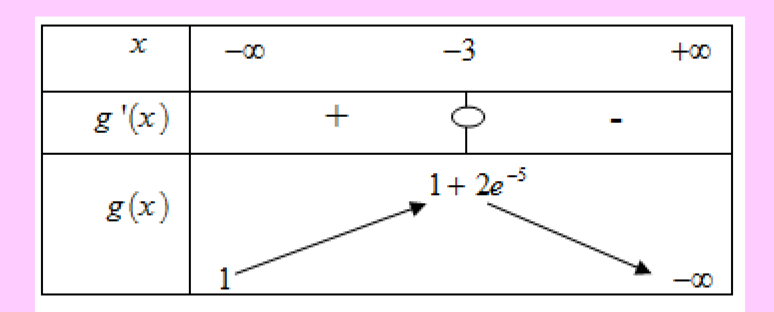
د)- نعتبر الجداء P_n حيث : $P_n = \dfrac{1}{\left(U_0 - 1\right)} \times \dfrac{1}{\left(U_1 - 1\right)} \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times \dfrac{1}{\left(U_n - 1\right)}$

- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $P_n = \dfrac{1}{2} e^{2^n Ln 4}$

التمرين الثالث:(08 نقاط)

الجزء الأول :

الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - \left(2x + 4\right)e^{x-2}$



x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1 ↗	$1 + 2e^{-5}$	↘ $-\infty$

1)- أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.4 \prec \alpha \prec 0.5$.

2)- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2e^{x-2}-\frac{1}{4}x^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

1)- أحسب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\frac{1}{2}xg(x)$ ، استنتج اتجاه تغيرا لدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3)- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

4)- عين نقاط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

5)- انشئ (C_f) على المجال $[-5,2]$ (نأخذ : $f(\alpha)\approx-0.2$)

6)- عين قيم الوسيط الحقيقي التي من أجلها المعادلة : $e^x=\left(\frac{m}{x^2}+\frac{1}{4}\right)\times e^2$ تقبل ثلاث حلول مختلفة .

7)- لتكن الدالتين g و G المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^2e^{x-2}$ ، $G(x)=(x^2-2x+2)e^{x-2}$

أ)- بين أن الدالة G هي دالة أصلية للدالة g ، استنتج حساب : $\int_1^2 g(x)dx$

بـ)- أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) ومحور الفواصل و المستقيمين الذي معادلتهما :

$x=1$ $\quad$ $x=2$

الجزء الثالث :

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=e^{1-f(x)}$

أكتب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، استنتج إشارتها ،ثم شكل جدول تغيرات الدالة h (دون حساب عبارة $h(x)$)

لا تضيع فرصة تقييم مستواك

الــموضوع الثــاني :

التمرين الأول:(04 نقاط)

I)- إختر الإجابة الصحيحة مع التبرير :

1)- (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_n = \int_n^{n+1} e^{2-x}dx$ ، المجموع : $U_0 + U_1 + ... + U_n$ يساوي :

أ)- $e^2\left[1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right]$ ب)- $e(e-1)\left[1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n}\right]$ جـ)- $e(e-1)\left[1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right]$

2)- A عدد حقيقي حيث : $A = \dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt[4]{16}\times\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$

أ)- $A = \frac{1}{2}$ ب)- $A = 2$ جـ)- $A = \sqrt{2}$

II)- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5x - 6y = 3$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}$ الجملة : $\begin{cases}\alpha \equiv -1[6]\\ \alpha \equiv -4[5]\end{cases}$ بطريقتين مختلفتين .

التمرين الثاني:(08 نقاط)

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما تحقق : $\begin{cases}U_5 = 32768\\ U_7 = 2097152\end{cases}$

1)- أوجد الأساس q لهذه المتتالية و حدها الأول U_0 .

2)- أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n ، أحسب : $\lim_{n\to+\infty} U_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3)-أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

4)- باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1 + 8 + 8^2 + ... + 8^n = \frac{8^{n+1}-1}{7}$$

5)-عين العدد الطبيعي n بحيث : $1 + 8 + 8^2 + ... + 8^n = 19173961$

6)- أ)- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 8^n على 13.

بـ)- استنتج باقي قسمة العدد α على 13 حيث : $\alpha = 102 \times 38^{2022} + 5^{1443} - 3$.

جـ)- عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $7S_n \equiv 4[13]$

7)- أ)- برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n : $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)\times 8^{2n}\ [13]$

بـ)- عين قيم العدد الطبيعي التي تحقق : $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$ و n مضاعف للعدد 2 .

التمرين الثالث:(08 نقاط)

الجزء الأول :

- لتكن الدالة f المعرفة على $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ بـ : $f(x) = x + 2 - Ln(2x+1)^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

1)- أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا.

2)- ادرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3)- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (Δ) معامل توجيهه -3 ، ثم اكتب معادلته .

4)- أوجد إحداثيتي نقطتي تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي (T) معادلته : $y = x$.

5)- أحسب : $f(-1)$ ، $f(6)$ ثم أنشئ (C_f) و (Δ).

6)- لتكن الدالتين h و H المعرفتان على المجال $\left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$ بـ :

$$H(x) = \left(\frac{2x+1}{2}\right)Ln(2x+1) - x \quad ، \quad h(x) = Ln(2x+1)$$

أ)- بين أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h.

بـ)- أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بــ : (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذي معادلتهما $x = 0$

$x = \lambda$ حيث : $\lambda \succ 0$. جـ)- بين أن : $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = +\infty$.

الجزء الثاني :

- لتكن الدالة g المعرفة على $D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ بــ : $g(x) = \frac{3}{2} + \left|x + \frac{1}{2}\right| - 2Ln\left|2x + 1\right|$ ، (C_g) تمثيلها البياني

أ)- أثبت أنه من أجل كل $x \neq -\frac{1}{2}$ يكون $-x - 1 \neq -\frac{1}{2}$ و ، $g(-1-x) = g(x)$ فسر هذه النتيجة بيانا .

بـ)- أثبت أن : $g(x) = f(x)$ على مجال يطلب تعيينه .

جـ)- إشرح كيفية إنشاء (C_g) إنطلاقا من (C_f) ، ثم انشئه في نفس المعلم السابق (استعمل الالوان للتوضيح)

لا تضيع فرصة تقييم مستواك

بالتوفيق و النجاح في شهادة البكالوريا 2022 الأستاذة : بن زادي



الوثيقة المرفقة : التمرين الثاني الموضوع الأول : الإسم و اللقب :...

الوثيقة المرفقة : التمرين الثاني الموضوع الأول : الإسم و اللقب :...

التصحيح النموذجي للبكالوريا الوردية في مادة الرياضيات — القـــسم : 03 رياضيات

المـــوضوع الأول :

التمرين الأول: ☹☺☹ (06نقاط)

I)- 1)- بواقي قسمة العدد 5^n على 7 :

$5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ ، $5^6 \equiv 1[7]$.

ومنه : $P = 6$ ....(01ن)

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3	$[7]$

- $1443 \equiv 1[7]$ ، $2022 = 337 \times 6$ معناه : $5^{2022} \equiv 1[7]$ ومنه : $A \equiv 2[7]$

باقي قسمة A على 7 هو 2 . ...(0.5ن)

2)- $222 \equiv 5[7]$ ومنه : $222^n \equiv 5^n[7]$ ، $222^n + 4\times 5^n + 337 \equiv (5^{n+1}+1)[7]$

$222^n + 4\times 5^n + 337 \equiv 0[7]$ معناه : $5^{n+1}+1 \equiv 0[7]$ ، $5^{n+1} \equiv 6[7]$ ، $n+1 = 6k+3 \ (k \in \mathbb{N})$ ومنه :

$(k \in \mathbb{N})\ n = 6k+2$..(01ن)

3)- $B = 2\times 10^3 + 10x + x = 11x + 2000 \quad (0 \le x \prec 10)$

$B \equiv 6[7]$ معناه : $4x + 5 \equiv 6[7]$ ، $4x \equiv 1[7]$ ، $8x \equiv 2[7]$ ، $x \equiv 2[7]$ و منه :

$(k \in \mathbb{N})\ x = 7k+2$ ، لكن : $0 \le x \prec 10$ و منه : $0 \le 7k+2 \prec 10$ ، $\frac{-2}{7} \le k \prec \frac{8}{7}$ ، $k \in \{0,1\}$.

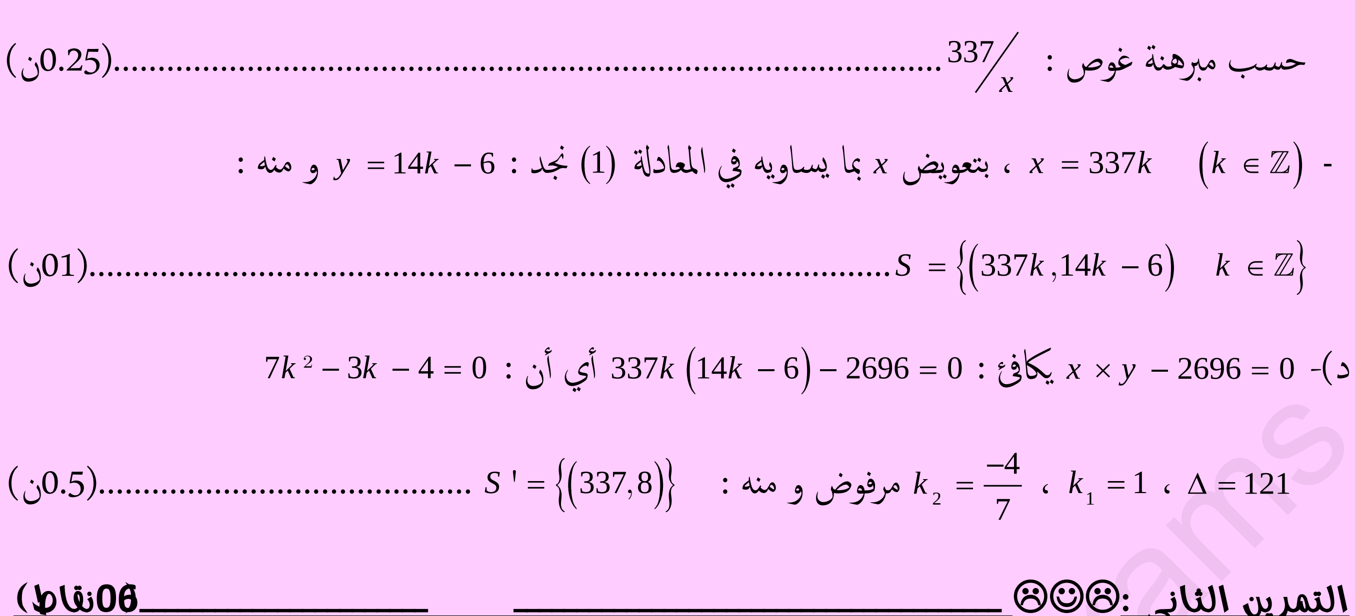
و منه : $x = 2$ أو $x = 9$. ($B = 2022$ أو $B = 2099$ غير مطلوب) ....(0.75ن)

II)- 1)- $\sqrt{337} \approx 18.35$ ، 337 لا يقبل القسمة على : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ومنه العدد 337 أوليا......(0.5ن)

2)-أ)- $PGCD(14,337) = 1$ $\left(1 / 2022\right)$ ومنه المعادلة (1) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ . ...(0.25ن)

ب)- $2022 = 2\times 3\times 337$..(0.25ن)

جـ)- $14x - 337y = 2022$ يكافئ : $14x = 337(y+6)$ ، $337 / 4x$ لكن : 14 و 337 أوليان فيما بينهما و منه :



حسب مبرهنة غوص : $337/x$ ....(0.25ن)

- $(k\in\mathbb{Z})$ $x=337k$ ، بتعويض x بما يساويه في المعادلة (1) نجد : $y=14k-6$ و منه :

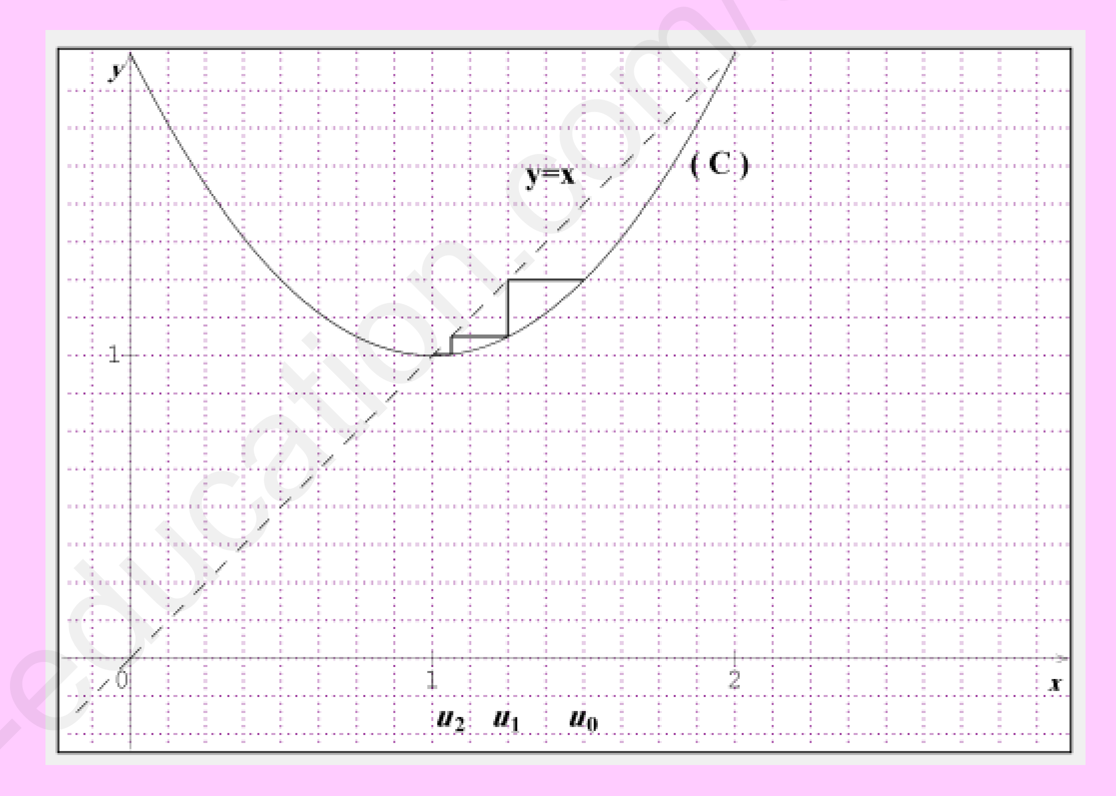
$S=\{(337k,14k-6) \quad k\in\mathbb{Z}\}$ ....(01ن)

د)- $x\times y-2696=0$ يكافئ : $337k(14k-6)-2696=0$ أي أن : $7k^2-3k-4=0$

$\Delta=121$ ، $k_1=1$ ، $k_2=\frac{-4}{7}$ مرفوض و منه : $S'=\{(337,8)\}$ ....(0.5ن)

التمرين الثاني: ☹☺☹ (06نقاط)

1)- أ)- تمثيل الأربع حدود الأولى من (U_n) . ...(0.25ن)



ب)- (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$. (U_n) متقاربة . ...(0.5ن)

جـ)- البرهان بالتراجع ....(0.75ن)

د)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1}-U_n=U_n^2-3U_n+2=(U_n-1)(U_n-2)$

بما أن $1\prec U_n\prec 2$ فإن : (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ . ...(0.5ن)

(U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة : $\lim_{n\to+\infty}U_n=l$ ....(0.25ن)

$l^2-3l+2=0$ ، $\Delta=1$ مرفوض ، $l_2=2$ ، $l_1=1$ ومنه : $\lim_{n\to+\infty} U_n=1$ ....(0.25ن)

2)- أ)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_{n+1}=\ln(U_{n+1}-1)=\ln(U_n^2-2U_n+2-1)=\ln\left[(U_n-1)^2\right]$

$V_{n+1}=2\ln(U_n-1)=2V_n$ $(1\prec U_n\prec 2)$ ومنه : (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$ و حدها الأول :

$V_0=Ln\left(\frac{3}{2}-1\right)=Ln\left(\frac{1}{2}\right)=-Ln2$ ....(0.5ن)(0.25ن)(0.25)

بـ)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_n=-2^nLn2$ ، $U_n=e^{V_n}+1=e^{Ln\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}+1$.........(0.5ن)(0.5 ن)

بما ان : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}=0$ ومنه : $\lim_{n\to+\infty} U_n=1$ ....(0.25ن)

جـ)-

$$S_n=\frac{1}{2Ln10}\left[Ln(U_0-1)+Ln(U_1-1)+........+Ln(U_n-1)\right]$$

$$S_n=\frac{1}{2Ln10}\left[V_0+V_1+.....+V_n\right]=\frac{1}{2Ln10}\left[\frac{-Ln2}{1-2}\left(1-2^{n+1}\right)\right]$$

ومنه : $S_n=\left(\frac{1-2^{n+1}}{2}\right)\log 2$ ....(0.5ن)

$\lim_{n\to+\infty} S_n=-\infty$ ....(0.25ن)

د)- $e^{V_n}=U_n-1$ $\quad \frac{1}{e^{V_n}}=e^{-V_n}=\frac{1}{U_n-1}$

$$P_n=e^{-V_0}\times e^{-V_1}\times......\times e^{-V_n}=e^{-V_0-V_1-.......-V_n}=e^{-(V_0+V_1+.......+V_n)}$$

$P_n=e^{-Ln2\left(1-2^{n+1}\right)}=e^{Ln\frac{1}{2}+2^{n+1}\ln 2}=\frac{1}{2}e^{2^n\times 2Ln2}=\frac{1}{2}e^{2^nLn4}$ ....(0.5ن)

التمرين الثالث: ☹☺☹ ______________ (08نقاط)

الجزء الأول :

1)- مبرهنة القيم المتوسطة ....(0.25ن)

2)- إشارة $g(x)$: ....(0.5ن)

x	$-\infty$ α $+\infty$
إشارة $g(x)$	+ 0 -

الجزء الثاني

1)- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2\left(e^{x-2}-\frac{1}{4}\right)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{x-2}-\frac{1}{4}\right)=+\infty$ ....(0.5ن)

2)- f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$:

$f'(x)=2xe^{x-2}+x^2e^{x-2}-\frac{1}{2}x=\frac{4xe^{x-2}+2x^2e^{x-2}-x}{2}=\frac{-x\left(-4e^{x-2}-2xe^{x-2}+1\right)}{2}$ ومنه :

$f'(x)=-\frac{1}{2}xg(x)$ ....(0.5ن)

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$-\frac{1}{2}x$	+	0	-	-
$g(x)$	+		+	0 -
$f'(x)$	+	0	-	0 +

و منه : f متناقصة تماما على المجال: $[0,\alpha]$ ، f متزايدة تماما على المجال : $]-\infty,0]\cup[\alpha,+\infty[$ ....(0.5ن)

جدول تغيرات الدالة f : ....(0.75ن)

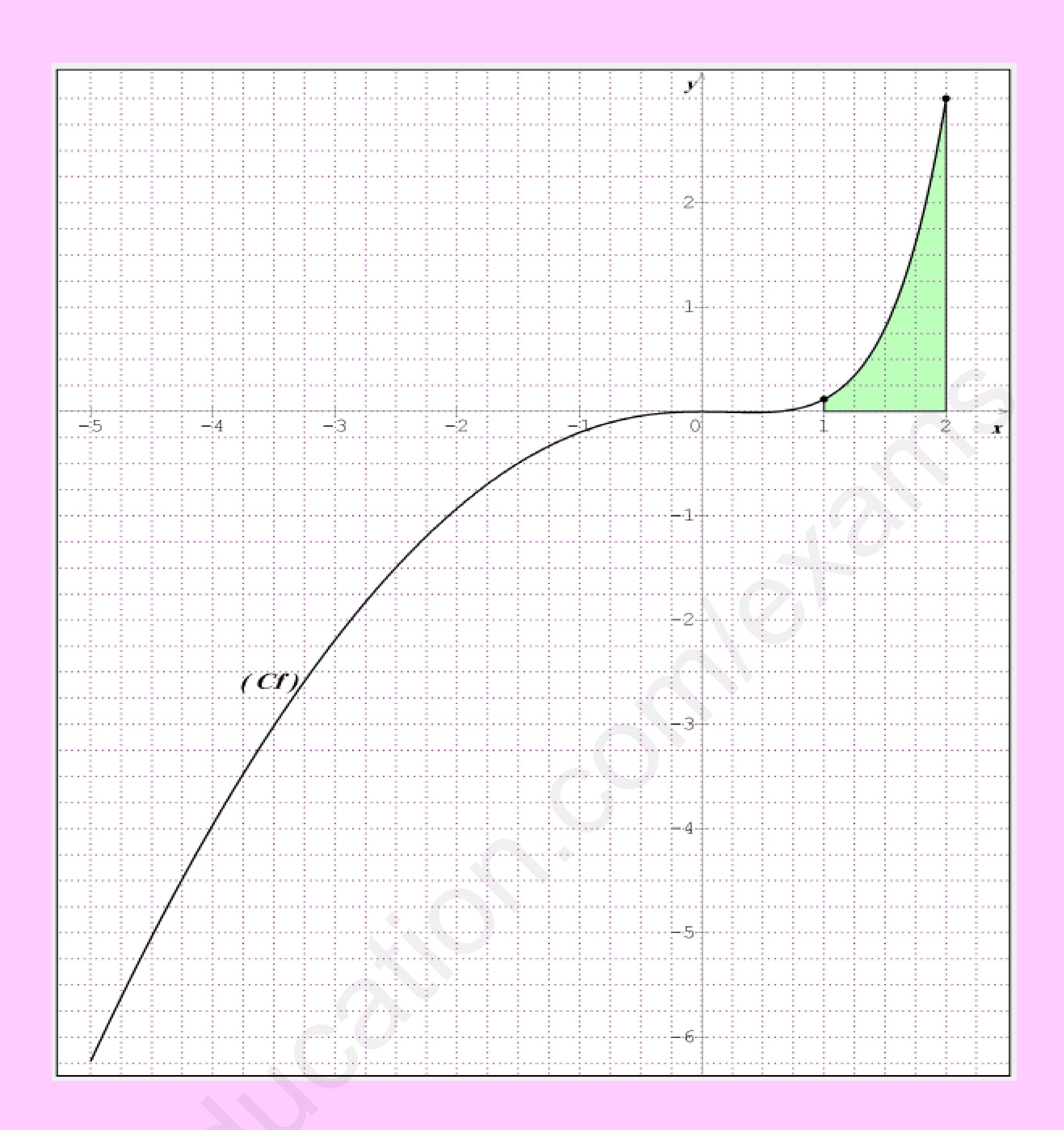
x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3)- $(T): y=f'(x)(x-2)+f(2)=7x-11$ ....(0.25ن)

4)- $(C_f)\cap(xx')$: $f(x)=0$ يكافئ : $x^2\left(e^{x-2}-\frac{1}{4}\right)=0$ ومنه : $x=0$ أو $x=2-Ln4$.

$(C_f)\cap(xx')=\{O,A(2-Ln4,0)\}$ ....(0.5ن)

5)- إنشاء (C_f): ....(01ن)



6)- $\left(\frac{m}{x^2}+\frac{1}{4}\right)\times e^2 = e^x$ معناه : $f(x)=m$ ، للمعادلة ثلاث حلول يكافئ : $m\in\left]-0.2;0\right[$ ....(0.5ن)

G قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $G'(x)=(2x-2)e^{x-2}+(x^2-2x+2)e^{x-2}=(2x-2+x^2-2x+2)e^{x-2}$

ومنه : $G'(x)=x^2e^{x-2}=g(x)$ ....(0.25ن)

$\int_1^2 g(x)dx=G(2)-G(1)=2-e^{-1}$ ....(0.5ن)

ومنه : $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 g(x)dx+\int_1^2 \frac{-1}{4}x^2dx=2-e^{-1}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{17}{12}-e^{-1}$

$S=\left(\frac{17}{3}-\frac{4}{e}\right)cm^2$ ....(0.75ن)

الجزء الثالث :

h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $h'(x) = -f'(x)e^{1-f(x)}$ ....(0.5ن)

h و f متعاكستان في اتجاه التغير . ...(0.25ن)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	

جدول تغيرات الدالة f : ....(0.5ن)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	
$h(x)$	$+\infty$	↘	e	↗	$e^{1.2}$	↘	0

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية وهران

المقاطعة الأولى (وهران شرق)

الامتحان التجريبي لبكالوريا 2022في مادة الرياضيات

الشعبة :رياضيات　　　　　　　　　　　　　　　　المدة : أربع ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين فقط

الموضوع الأول

التمرين الأول(05ن)

1) أ) بيّـن أن 193عدد أولي .

ب) حلّـل 206 إلى جداء عوامل أولية .

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $4x-193y=78$.

أ) جـد الثنائية الطبيعية $(a;b)$ التي تحقق : $\begin{cases} PPCM(a;b)=618 \\ PGCD(a;b)=3 \end{cases}$ و $4a-193b=78$

ب) استنتج حلول المعادلة (E).

3) M و N عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب$\overline{\alpha 12\beta}$ و$\overline{5\beta 1\alpha}$ في نظام التعداد ذو الأساس7 و$M\equiv N[193]$

حيثα و β رقمان طبيعيان كل منهما أصغر من 7.

أ) تحقّـق أن$44\alpha+48\beta\equiv 78[193]$.

ب) بيّـن أن$11\alpha+12\beta=116$.

جـ) عيّـنα وβ ثم أكتبM و N في النظام العشري.

التمرين الثاني (04ن)

يمتلك لاعب نردين A و B متماثلان من حيث الشكل إلا أن النردA مغشوش و فيه كل وجهين متقابلين منه يحملان نفس الرقم i حيث $i\in\{1;2;3\}$ (كل رقم من الأرقام الثلاثة مسجل على وجهين متقابلين)، أما النرد B ليس مغشوشا وفيه ثلاثة أوجه تحمل الرقم 1و ثلاثة أوجه تحمل الرقم2 . يرمي اللاعب أحد النردين و نرمز بـ P_iلاحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم i في الحالتين (رمي النرد Aأو رمي النردB)

1) يرمي اللاعب النرد A ، أحسب p_1 ، p_2، p_3علما أنها تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها$\frac{1}{4}$.

2) أحسب p_1 ، p_2. في حالة رمي النرد B

3) نرمي النردين في آن واحد ، و نعتبر المتغير العشوائيXالذي يأخذ كقيم له مجموع رقمي الوجهين العلويين .

عـرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضياتي.

التمرين الثالث (04ن)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $U_{n+1} = \frac{2U_n}{\sqrt{U_n+1}}$ و $U_0 = 2$

1) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $U_{n+1} = 2\sqrt{U_n + 1} - \frac{2}{\sqrt{U_n+1}}$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 3$

جـ) بيّن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

2) أ) بيّـن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $9 - U_{n+1}^2 < 4(3 - U_n)$

ب) بيّـن أنه من أجل كل عدد طبيعي، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - U_n)$

جـ) بيّـن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 - U_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

د) استنتج نهاية (U_n).لمّــــا $n \to \infty$

التمرين الرابع (07ن)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + lnx$

1) أدرس اتجاه تغير g على $]0; +\infty[$.

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}} + 1 - x$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستو المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) بيّـن أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{\sqrt{x}} = 0$.

2) أحسب نهايات الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

3) أ) بيّـن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

4) أ) بيّـن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

ت) شكّــــل جدول تغيرات الدالة f.

5) أنشئ المنحنى (C_f) .

6) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة جد العدد الحقيقي: $\int_{e^{-2}}^{1} \frac{lnx}{\sqrt{x}}\, dx$

ب) أحسب مساحة للحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = e^{-2}$ و x=1 .

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = xe^{-\frac{x}{2}} - e^x + 1$

1) بيّـن انه من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x) = f(e^x)$

2) استنتج جدول تغيرات الدالة h .

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(4.5نقط)

aعدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 . نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$:

$$f(x)=\sqrt{1+a.x^2}$$

1.تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

2.(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

I) نفرض أن : $0\prec a\prec 1$

أ)برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ب) بين أن (u_n) متزايدة .

جـ) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .ثم عين نهايتها.

II)نضع $a\succ 1$:

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_{n+1}^2-u_n^2$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2-u_n^2=a^n$.

جـ)من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (S_n)كالآتي :

$S_0=0$ و من أجل كل $n\ge 1$ ، $S_n=1+a+a^2+a^3+......+a^{n-1}$

تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=\dfrac{a^n-1}{a-1}$.

د) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\sqrt{S_n}$.ثم أحسب نهاية (u_n) .

التمرين الثاني:(4.5نقط)

1. aو bعددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس ثلاثة على الشكل $a=\overline{201}$ و $b=\overline{100}$

أكتب العددين a و b في النظام العشري .

2. x ، y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x\ ;\ y)$التالية :

$$ax-by=3$$

أ)بين أنه إذاكانت الثنائية $(x\ ;\ y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x\equiv 0[3]$.

بـ)إستنتج حلا خاصا $(x_0\ ;\ y_0)$حيث $0\le x_0\prec 5$.ثم حل المعادلة (E) .

3.نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x\ ;\ y)$حل للمعادلة (E).

أ)ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

بـ) بين ان $p\gcd(x,y)=p\gcd(y,3)$.

جـ)عين الثنائيات $(x\ ;\ y)$ حلول المعادلة (E) حتى يكون $\dfrac{y}{x}$ كسرا قابلا للإختزال .

4) (u_n) و (v_n) متتاليتان حسابيتان معرفتان على $\mathbb{N}$: $u_0=2$ ، $v_0=5$

$u_{n+1}=u_n+19$ و $v_{n+1}=v_n+9$

−عين كل الثنائيات $(p;q)$ للأعداد الطبيعية التي تحقق ، $u_p=v_q$ و $|q-p|\leq 20$.

التمرين الثالث :(4نقط)

كيس فيه أربع كرات حمراء وكرتين سوداوين لا نفرق بينها عند اللمس.

العملية الأولى نسحب من الكيس عشوائيا كرتين في آن واحد .

نرمز بـ ، إلى الحوادث ، A_0 "لانحصل على أي كرة سوداء"

A_1"الحصول على كرة سوداء واحدة فقط"

A_2 "الحصول على كرتين سوداوين"

أحسب كل من $p(A_0)$، $p(A_1)$ و $p(A_2)$.

2.بعد عملية السحب الأول ،يبقى في الكيس أربع كرات .نقوم بالسحب الثاني إذ نسحب كرتين في آن واحدأيضا.

نرمز إلى الحوادث : B_0 "لانحصل على أي كرة سوداءفي السحب الثاني"

B_1"الحصول على كرة سوداء واحدة فقط في السحب الثاني "

B_2 "الحصول على كرتين سوداوين في السحب الثاني "

أ)أحسب كل من $p_{A_0}(B_0)$ ، $p_{A_1}(B_0)$ و $p_{A_2}(B_0)$.ثم بين أن $p(B_0)=\frac{2}{5}$.

ب)أحسب كل $p(B_1)$ و $p(B_2)$.

ج)بإفتراض أننا على كرة سوداء في السحب الثاني.مإحتمال الحصول على كرة سوداءواحدة في السحب الأول؟

3. نعتبر الحادثة C "الحصول على كرتين سوداوين، بعد السحب الأول والإضرار إلى السحب الثاني " .

أحسب $p(C)$.

التمرين الرابع:(7نقط)

I) 1. لتكن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$بـ : $u(x)=xe^x$

أدرس إتجاه تغير الدالة uثم إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $xe^x\geq -\frac{1}{e}$.

2. gدالة معرفة على $]-\infty;0]$ بـ : $g(x)=1-(x^2+x+1)e^x$

أ−باستعمال إتجاه تغير الدالة g بين أن من أجل كل من x من $]-\infty;0]$ ، $g(x)\geq 0$.

(لايطلب حساب نهاية g عند $-\infty$)

II)لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{xe^x+1} & x\leq 0 \\ f(x)=x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)+1 & x\succ 0 \end{cases}$$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(الوحدة $2cm$)

1.أ) أدرس إستمرارية f عند 0 ؟

ب)أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 .فسر النتيجة بيانيا.

2. أ)أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب)بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ثم أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) على المجال $]-\infty;0]$.

3. أ)أدرس اتجاه تغير الدالة f على $]-\infty;0]$ ، ثم على المجال $]0;+\infty[$.

(يمكن ملاحظة أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $]-\infty;0]$).

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. I نقطة من المنحنى (C) فاصلتها -1 .

أ)بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة I هي : $y = \dfrac{e}{e-1}(x+1)$.

ب)أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) . (إستعن بالإجابة المنجزة في I (1.)

5. أنشئ (T) ، (Δ) و (C) .

6 . n عدد طبيعي غير معدوم .

نسمي $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ و $x = 1$ و $x = n+1$.

أ) (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$ و المجموع $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $S_n = A(n)$.

ب) أحسب بـ cm^2 المساحة $A(n)$ بدلالة n .ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية الوطنية
وزارة التربية الوطنية

الإجابة النموذجية لموضوع بكالوريا تجريبي2022 في مادة الرياضيات / الشعبة : رياضيات

عناصر الإجابة(الموضوع الأول)	العلامة	
	مجزأة	المجموع
التمرين الأول:(5 نقاط)		
1)أ) 193عددا أوليا لأن 193 لا يقبل القسمة على 2، 3، 5 ، 7 ، 11 ، 13. $(\sqrt{193} \simeq 13.89)$	0.25	
ب) $206 = 2 \times 103$.	0.25	0.5
2)أ)		
$PGCD(a;b) = 3$ معناه $a = 3a'$ ، $b = 3b'$ و $PGCD(a';b') = 1$.	0.25	
$PPCM(a;b) = 618$: $618 \times 3 = 3a' \times 3b'$	0.25	
و منه $a' \times b' = 206$		
إذن $(a';b') \in \{(1;206),(206;1),(2;103),(103;2)\}$	0.5	
بالتالي $(a;b) \in \{(3;618),(618;3),(6;309),(309;6)\}$	0.5	
و $4 \times 309 - 193 \times 6 = 78$	0.25	
إذن $(a;) = (309;6)$		
ب)حل المعادلة ( ) :($(x;y) = (193k + 309; 4k + 6)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$	0.5	2.25
1) $M = \overline{\alpha 12\beta} = 343\alpha + \beta + 63$	0.25	
$N = \overline{5\beta 1\alpha} = \alpha + 49\beta + 1722$	0.25	
أ) $N - M \equiv 0[193]$		
	0.25	
ب) $44\alpha + 48\beta = 193l + 78$ حيث $l \in \mathbb{Z}$		
$11\alpha + 12\beta = 193k + 309$ مع $0 \le 11\alpha + 12\beta \le 138$	0.25	
إذن $11\alpha + 12\beta = 116$.	0.25	
جـ) $\alpha = 4$ و $\beta = 6$		
$M = 1441$ و $N = 2020$	0.25*4	2.25
التمرين الثاني:(4 نقاط)		

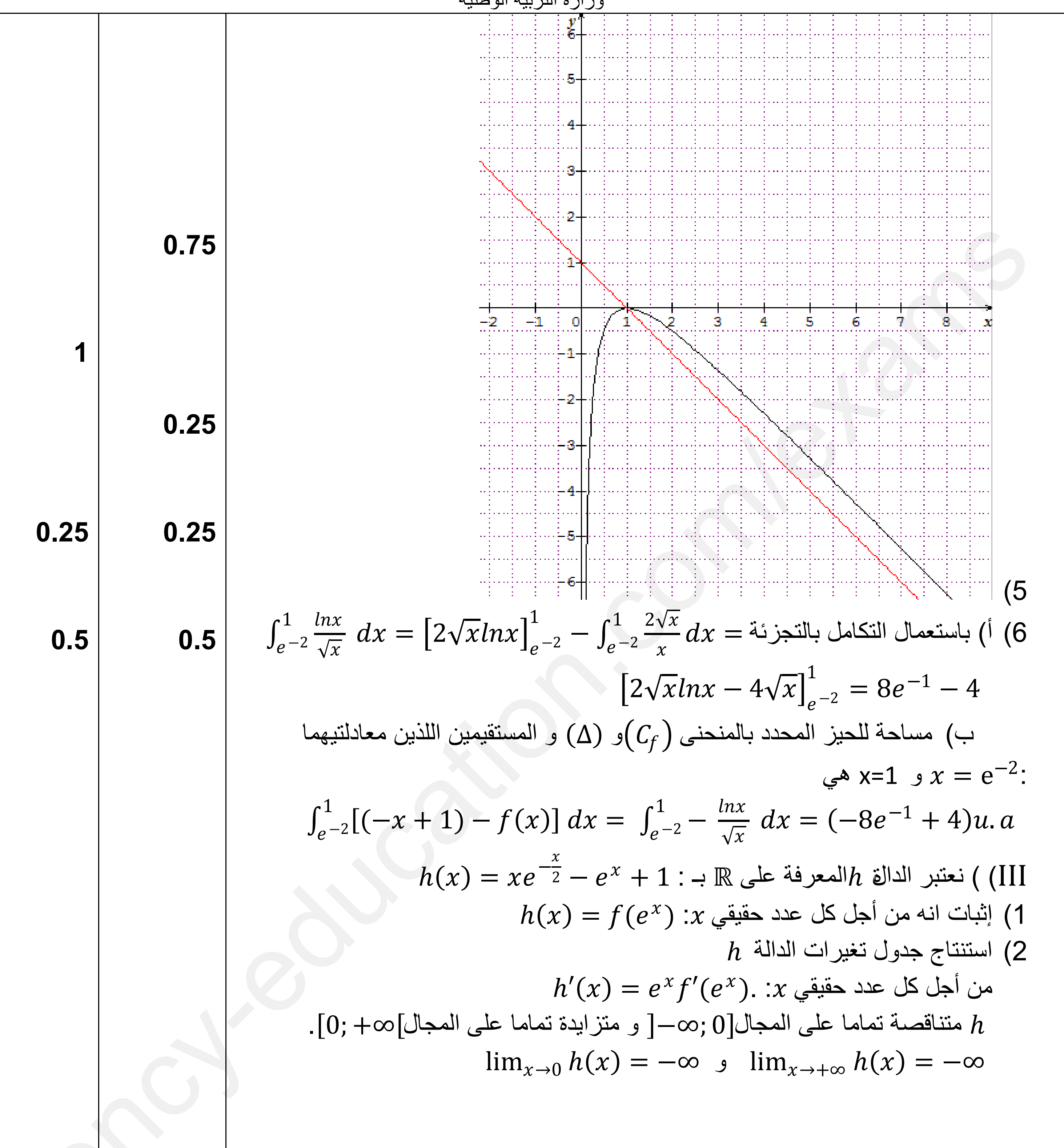
1.25	0.25*2 0.25*3	1) p_1 ، p_2، p_3 تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$ مع و منه
0.75	0.25*3 0.5	2) $p_2 = \quad p_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 3) قيم Xهي :$\{2;3;4;5\}$ قانون الاحتمال لـ X
2	1 0.5	

	2	3	4	5

التمرين الثالث:(4 نقاط)

2	0.25 0.25 0.5 0.25 0.5 0.25 0.75 0.75	1) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n $U_{n+1} = 2\sqrt{U_n + 1} - \frac{2}{\sqrt{U_n+1}}$، ب) $1 < U_0 < 3$ نفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 3$ نجد و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 3$ جـ) $_{n+1} - U_n = \frac{U_n(2-\sqrt{u_n+1})}{\sqrt{U_n+1}}$ حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 3$نجد أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما - المتتالية (U_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بـ 3 نستنتج أنها متقاربة . 2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $9 - U_{n+1}^2 < 4(3 - U_n)$ ب) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي ، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - U_n)$ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{3+U_{n+1}}(3 - U_n)$

		و $U_0 < U_1 < U_2 < \cdots < U_{n+1}$ إذن $2 < U_{n+1}$
		فنجد أنه من أجل كل عدد طبيعي، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - U_n)$
2	0.25	جـ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 - U_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$
		د) من أجل كل عدد طبيعي n، $3 - \left(\frac{4}{5}\right)^n < U_n < 3$
	0.25	إذن $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$
		التمرين الرابع: (7 نقاط)
		I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + lnx$
0.75	0.25*3	1) من أجل x من $]0;+\infty[$: $g'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ و $g'(x) > 0$
		إذن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.
		2) $g(1)=0$ وبما أن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن :
0.	0.25*2	$g(x) < 0$ على المجال $]0;1[$ و $g(x) > 0$ على المجال $]1;+\infty[$.
		II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}} + 1 - x$
		1) بوضع $t = \sqrt{x}$ لما $x \to +\infty$: $t \to +\infty$
0.5	0.5	$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{ln\,t^2}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2lnt}{t} = 0$
0.5	0.25*2	2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$
	0.25	3) أ) $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (-x+1)] = 0$
		إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.
0.75	0.5	ب) (C_f) يقع أسفل (Δ) على المجال $]0;1[$ و (C_f) يقع أعلى (Δ) على المجال
		$]1;+\infty[$
	1	4) أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$
1.5	0.5	ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$
		جدول تغيرات الدالة f.
0.75	0.25+0.5	



المجموع	مجزأة	عناصر الإجابة
1	0.75	5) (رسم المنحنى والمستقيم)
0.25	0.25	
0.5	0.5	6) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة $\int_{e^{-2}}^{1} \frac{lnx}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}lnx\right]_{e^{-2}}^{1} - \int_{e^{-2}}^{1} \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx =$ $\left[2\sqrt{x}lnx - 4\sqrt{x}\right]_{e^{-2}}^{1} = 8e^{-1} - 4$
		ب) مساحة للحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = \mathrm{e}^{-2}$ و x=1 هي: $\int_{e^{-2}}^{1}[(-x+1) - f(x)]\,dx = \int_{e^{-2}}^{1} -\frac{lnx}{\sqrt{x}}\,dx = (-8e^{-1}+4)u.a$
		III)) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = xe^{-\frac{x}{2}} - e^{x} + 1$
		1) إثبات انه من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x) = f(e^{x})$
		2) استنتاج جدول تغيرات الدالة h
		من أجل كل عدد حقيقي x: $h'(x) = e^{x}f'(e^{x})$.
		h متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.
		$\lim_{x\to 0} h(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية الوطنية
وزارة التربية الوطنية

الحل النموذجي لبكالوريا التجريبي دورة ماي 2022 **شعبة :الرياضيات**

الموضوع الثاني

عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: مجموع
التمرين الأول /1 $f'(x)=\frac{ax}{\sqrt{1+ax^2}}$ ، من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f'(x)\geq 0$ 0.5........ تقبل طرق أخرى . متزايدة تماما على $[0;+\infty[$		04.5
/2 (I أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leq u_n\leq\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ 0.5........ **ب) متزايدة .** **0.5 ......** **جـ) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ** $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ **فهي متقاربة .نهايتها** $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ 0.5...... (II $a>1$ .1 (v_n) متتالية هندسية أساسها a وحدها الأول $v_0=1$ 0.5..... .... .2 $v_n=v_0.a^n=a^n$ **ومنه** $u_{n+1}^2-u_n^2=a^n$ 0.5........... جـ) $S_n=1+a+a^2+a^3+......+a^{n-1}$ ، $n\geq 1$ **و من أجل كل** $S_0=0$ $S_n=\frac{a^n-1}{a-1}$ ، $n\geq 1$ **و من أجل كل** $S_0=0$ **0.5** $S_n=\frac{a^n-1}{a-1}$ ، **ومنه من أجل كل عدد طبيعي** n $S_n=1+a+a^2+a^3+......+a^{n-1}$ د) $S_n=u_1^2-u_0^2+u_2^2-u_1^2+u_3^2-u_2^2+......+u_n^2-u_{n-1}^2$ **ومنه** $u_n^2=S_n$ **وبالتالي** $u_n=\sqrt{S_n}$ **و** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ 01.........		
التمرين الثاني: .1 $a=19$ **و** $b=9$ **0.5............** .2 أ) $19x-9y=3$ **فإن** $x\equiv 0[3]$. **0.5...........** **ب) الحل الخاص** $(x_0;y_0)=(3;6)$ **0.25............** **حلول المعادلة** $(x;y)=(9k+3;19k+6)$ **مع** k **عدد صحيح.** **0.5...........** .3 أ) $d\,\vert\,3$ **ومنه** $d\in\{1,3\}$ **0.5 ....** **ب) نضع** $p\gcd(x,y)=d$ **و** $p\gcd(y,3)=d'$ **0.75..........** . $d=d'$ **نجد**	4.5	

<table>
<tr><td>ج) $\frac{y}{x}$ كسر قابلا للإختزال يكافئ $p\gcd(x,y)=3$ 0.5 ....
عدد صحيح . p مع $(x;y)=(27p+3;57p+6)$
4. $u_p=2+19p$ و $v_q=5+9q$
$(p;q)=(9k+3;19k+6)$ ومنه $19p-9q=3$ يكافئ $u_p=v_q$
$(p;q)\in\{(3,6);(12,25)\}$ ومنه
01. ....</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>التمرين الثالث:
1/ $p(A_0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$ ، $p(A_1)=\frac{8}{15}$ ، $p(A_2)=\frac{1}{15}$ 0.75............</td><td></td><td rowspan="3">04</td></tr>
<tr><td>2/ أ) $p_{A_0}(B_0)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$ ، $p_{A_1}(B_0)=\frac{1}{2}$ ، $p_{A_2}(B_0)=1$ 0.75 ....
ومنه $p(B_0)=\frac{2}{5}$ 0.5........
ب) $p(B_1)=\frac{8}{15}$ و $p(B_2)=\frac{1}{15}$ 0.5+0.5........
ج) $p_{B_1}(A_1)=\frac{p(A_1\cap B_1)}{p(B_1)}=\frac{p(A_1)p_{A_1}(B_1)}{p(B_1)}$ نجد $p_{B_1}(A_1)=\frac{1}{2}$ 0.5 ....</td><td></td></tr>
<tr><td>3/ $p(C)=p(A_0\cap B_2)+p(A_1\cap B_1)$ نجد $p(C)=\frac{1}{3}$ 0.5...........</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">عناصر الإجابة</td><td colspan="2">العلامة</td></tr>
<tr><td>مجزأة</td><td>مجموع</td></tr>
<tr><td>التمرين الرابع:
I) 1.الدالة متناقصة تماما على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ 0.25 ....
من أجل كل عدد حقيقي x ، $xe^x\geq-\frac{1}{e}$. 0.25......
2. $g'(x)=-(x^2+3x+2)e^x$ 0.25.....
ومنه من أجل كل x من $]-\infty;0]$ ، $g(x)\geq0$ 0.25......</td><td></td><td>07</td></tr>
</table>

		II) 1/ أ) f مستمرة عند 0 0.5........ ب) f قابلة للإشتقاق عند 0 من اليسار وعددها المشتق $f_g'(0)$ معدوم 0.25...... f غير قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين لأن $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ 0.25...... يقبل نصف مماس من اليمين يوازي حامل محور التراتيب ونصف مماس من اليسار يوازي حامل محور الفواصل 0.25.....
		II) 2. أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 2 .... x0.25 ب) $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = 0$ 0.25........... (C) يقع أسفل (Δ) على $]-\infty;-1[$ ويقع أعلى (Δ) على $]-1;0]$ 0.5....... ويقطعه في النقطة $A(-1,0)$
		II) 3.أ) على $]-\infty;0]$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(xe^x+1)^2}$ ، f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ ...0.25 على $]0;+\infty[$: $f'(x) = 1+\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ ، ....0.25 ب)جدول التغيرات 0.5........
		II) 4.أ) $(T): y = \frac{e}{e-1}(x+1)$ **0.25........** **ب) وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) 0.5.....**
		II) 5. إنشاء (T) ،(Δ) و (C) **0.75.........**
		$S_n = \int_1^2 f(x) + \int_2^3 f(x) + ... + \int_n^{n+1} f(x)$ II) 6.أ) $S_n = A(n)$ **0.25.........** ب) $A(n) = \left[4n + 2(n+1)^2\left[\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] + \ln(4e)\right] cm^2$ **5 .0..........** $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} A(n) = +\infty$ **0.25..........**

اختبار شهادة البكالوريا التجريبي في مادة: الرياضيات

الشعبة: علوم تجريبية — يوم الإثنين 16 ماي 2022 — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

1) النهاية التالية $\lim_{x\to+\infty} x\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)$ تساوي:

أ) $+\infty$ — ب) 0 — ج) -1

2) المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 1 + ln\left(\frac{2}{3}\right)^n$ هي:

أ) متتالية حسابية متناقصة — ب) متتالية هندسية متزايدة — ج) متتالية حسابية متزايدة.

3) الجدول التالي يعرف قانون احتمال تجربة عشوائية:

x_i	-2	-1	α	3
P_i	$0,12$	$0,5$	β	$0,3$

الأمل الرياضياتي لقانون الاحتمال هو $\mu = 0,32$ من أجل:

أ) $\alpha = 1$ و $\beta = 0,08$ — ب) $\alpha = 2$ و $\beta = 0,08$ — ج) $\alpha = 2$ و $\beta = 0,03$

4) إذا كان z عددا مركبا حيث $z = \frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$ فإن:

أ) $z^{2022} = 1$ — ب) $z^{2022} = -1$ — ج) $z^{2022} = i$

التمرين الثاني: (4,5 نقاط)

صندوق يحوي 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس, منها كريتان تحملان الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 0, وخمسة تحمل الرقم 2 .

1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق ونعتبر الحدثين A و B حيث:

A "الكريات المسحوبة تحمل أرقاما مختلفة " ، B "الكريات المسحوبة تحمل أرقاما جداؤها معدوم"

ا) احسب: $P(A)$ و $P(B)$ احتمال الحدثين A و B على الترتيب.

ب) بين أن: $P(A\cap B) = \frac{7}{10}$ ، هل الحدثان A و B مستقلان؟ علل.

ج) علما أن جداء ارقام الكرات معدوم ماهو احتمال ان تكون مختلفة.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الأرقام المتساويةالمحصل عليها.

ا) عين قيم المتغير العشوائي X.

ب) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X، ثم احسب تباينه $V(X)$.

التمرين الثالث:(4,5 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $3u_{n+1} = 2u_n - 4$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

1) اوجد قيمة α التي من أجلها تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$، و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = \frac{5}{v_n+5} - 5$

أ) بين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) بين أن المتتاليتين (w_n) و (u_n) متجاورتان.

ج) احسب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = \frac{1}{w_0+5} + \frac{1}{w_1+5} + ... + \frac{1}{w_n+5}$

التمرين الرابع:(07نقاط)

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - x^2e^x$, (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ماذا تستنتج؟

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

2) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثييهما.

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1

4) نعرف على $\mathbb{R}$ الدالة h كما يلي: $h(x) = e^{-1} + xe^x$

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج انها موجبة على $\mathbb{R}$.

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x؛ $f(x) - (1 + e^{-1}x) = -xh(x)$.

ج) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T).

5) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f).

6) أنشىء في نفس المعلم السابق المنحنى (C_g) الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - x^2e^{-x}$.

7) الدالة K معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $K(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^x$ حيث: a ؛ b و c أعداد حقيقية.

أ) عين الأعداد الحقيقية a،b و c حتى تكون الدالة K أصلية للدالة : $x \mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلتها:
$x = -2$، $y = 1$ ؛ $x = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقاط)

فيما يلي أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل:

1) المعادلة $log^3(x)-2log^2(x)-3log(x)=0$ تقبل ثلاث حلول في $\mathbb{R}$.

2) f دالة فردية مستمرة على المجال $[-a;a]$: التكامل $\int_{-a}^{a}f(x)dx$ يساوي 0.

3) A و B حدثان مستقلان معرفان على نفس المجموعة Ω حيث: $P(A)=0,2$ و $P(A\cup B)=0,7$،
إحتمال الحدث B يساوي: $0,5$

4) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$، مجموعة النقط M ذات اللاحقة z
حيث: $\left|\left(1-i\sqrt{3}z\right)\right|=4$ هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r=1$.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع قريصات بيضاء تحمل كل واحدة الرقم 3 و أربع قريصات سوداء تحمل كل واحدة الرقم2 . القريصات متماثلة و لا نفرق بينها باللمس.

1) نسحب عشوائيا من الكيس ثلاثة قريصات على التوالي دون إرجاع القريصة المسحوبة.

أ) احسب احتمال الأحداث التالية:

A : " القريصات المسحوبة بيضاء " ، B : " القريصات المسحوبة تحمل نفس الرقم ".

C : " ضمن القريصات المسحوبة واحدة على الأكثر سوداء ".

ب) هل الحدثان B و C مستقلان؟ علل

2) نعتبر في هذا الجزء أن عدد القريصات السوداء هو n (حيث: $n\geq 2$)، و نسحب من الكيس عشوائيا و في آن واحد قريصتين.

و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع الرقمين الظاهرين على القريصتين.

أ)عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، ثم احسب بدلالة n الأمل الرياضياتي له.

ب) استنتج عدد القريصات السوداء التي يجب وضعها في الصندوق حتى يكون $E(X)=5$.

التمرين الثالث(05 نقاط):

I (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} U_{n+1}=\dfrac{1}{3}U_n-1 \\ U_0=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$

1) ا) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n\leq -\dfrac{3}{2}$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)، ثم استنتج أنها متقاربة.

ج) احسب نهاية المتتالية (U_n).

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$

II (V_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $V_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $V_{n+1} = V_n + U_n + \frac{3}{2}$

1) بين أن المتتالية (V_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

2) ا) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $V_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$

ب) استنتج عبارة V_n بدلالة n.

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$، ثم استنتج أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$ln\left(\frac{2}{3}V_0 + 1\right) + ln\left(\frac{2}{3}V_1 + 1\right) + ... + ln\left(\frac{2}{3}V_n + 1\right) = ln\left(\frac{1}{3}\right)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

التمرين الرابع (07 نقاط)

I نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 ln|x-1| - 2 & ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = -2 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

1) احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ا) ادرس قابلية إشتقاق الدالة f عند $x_0 = 1$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1: $f'(x) = (x-1)(1 + 2ln|x-1|)$.

ج) ادرس إتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) ا) بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_f).

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $2,82 < \alpha < 2,83$، يطلب تعيين حصرا للعدد β.

4) اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1.

5) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f) على المجال $[-2; 4]$.

II 1) باستعمال التكامل بالتجزئة، أوجد الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto (x-1)^2 ln(x-1)$ على المجال $]1; +\infty[$ والتي تنعدم عند 2.

2) $A(\alpha)$ مساحةالحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلتها: $y = -2$، $x = \alpha$ و $x = 2$.

- بين أن: $A(\alpha) = \frac{1}{9}(-\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha - 4)\, u.a$

مديرية التربية لولاية غرداية	تصحيح نموذجي لاختبار البكالوريا التجريبي	دورة: ماي 2022
الشعبة: علوم تجريبية	مادة الرياضيات	المدة: 3 ساعات ونصف

الموضوع الأول

	العلامة
التمرين الأول:	**04**
1) الاقتراح الصحيح هو: ج	0,25
لأن: بوضع $X=\frac{1}{x}$ نجد: $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-e^{\frac{1}{x}})=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{X}(1-e^{X})=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-e^{X}}{X}=\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{e^{X}-1}{X}=-1$	0,75
2) الاقتراح الصحيح هو: أ	0,25
لأن: $u_{n+1}-u_n=\ln\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-\ln\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ و منه المتتالية حسابية و بما أن $\ln\left(\frac{2}{3}\right)<0$ فإنها متناقصة تماما.	0,75
3) الاقتراح الصحيح هو: ب	0,25
لأن: $\beta=1-(0{,}12+0{,}5+0{,}3)=0{,}08$ ؛ $0{,}08\alpha=0{,}32-(-0{,}24-0{,}5+0{,}9)=0{,}16$ منه: $\alpha=2$	0,75
4) الاقتراح الصحيح هو: ب	0,25
لأن: $z=\frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=\frac{1+2i}{2-i}=\frac{(1+2i)(2+i)}{5}=\frac{5i}{5}=i$ منه: $z^{2022}=(i)^{2022}=(i^2)^{1011}=(-1)^{1011}=-1$.	0,75
التمرين الثاني:	**4,25**
1) أ) حساب احتمال الحادثتين A و B: الحادثة $\overline{A}$ "الكريات تحمل نفس الرقم" ؛ الحادثة $\overline{B}$ "لا توجد كرية تحمل الرقم 0". $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_3^3+C_5^3}{C_{10}^3}=1-\frac{1+10}{120}=\frac{109}{120}$ ؛ $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=1-\frac{35}{120}=\frac{85}{120}=\frac{17}{24}$.	2 * 0,5
ب) تبيين أن $P(A\cap B)=\frac{7}{10}$: $P(A\cap B)=\frac{C_3^1\times C_7^2+C_3^2\times C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{63+21}{120}=\frac{84}{120}=\frac{7}{10}$.	0,5
بما أن: $P(A)\times P(B)=\frac{1853}{2880}$ و $P(A\cap B)=\frac{2016}{2880}$ منه: $P(A)\times P(B)\neq P(A\cap B)$ فإن الحادثتين B و A غير مستقلتين.	0,5
ج) حساب احتمال أن تكون أرقام الكريات مختلفة علما أن جداءها معدوم: $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{7}{10}\times\frac{24}{17}=\frac{84}{85}$.	0,5
2) أ) تعيين القيم الممكنة لـ X: لكريات إما تحمل نفس الرقم فإن $X=3$ و تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى فإن $X=0$ أو كريتان تحملان نفس الرقم و الأخرى تحمل رقما مختلفا فإن $X=2$ ، إذن: مجموعة القيم الممكنة لـ X هي $\{0;2;3\}$.	0,25
ب) تعريف قانون الاحتمال: $P(X=3)=P(\overline{A})=\frac{11}{120}$ ؛ $P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_7^1+C_2^2\times C_8^1+C_5^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{79}{120}$ ؛ $P(X=0)=\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}$ (انظر الجدول أدناه)	0,75
*) حساب التباين $Var(X)$: $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{3}x_i.p_i=\frac{191}{120}\approx1{,}59$ منه: $Var(X)=\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2.p_i-[E(X)]^2=\frac{13319}{14400}\approx0{,}925$.	0,75
التمرين الثالث:	**04,5**
1) حساب قيمة α: $v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}+\alpha=\frac{2}{3}v_n-\frac{2}{3}\alpha-\frac{4}{3}+\alpha=\frac{2}{3}v_n+\frac{\alpha-4}{3}$	0,5
تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ إذا و فقط إذا كان: $\frac{\alpha-4}{3}=0$ أي: $\alpha=4$. حدها الأول $v_0=u_0+\alpha=1+4=5$.	0,25

$x_i=$	0	2	3	Σ
$P(X=x_i)=$	$\frac{30}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{11}{120}$	1
$x_i.P_i=$	0	$\frac{158}{120}$	$\frac{33}{120}$	$\frac{191}{120}$
$x_i^2.P_i=$	0	$\frac{316}{120}$	$\frac{99}{120}$	$\frac{415}{120}$

2) تبيين عبارة الحد العام لـ (u_n):

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ حدها الأول 5 إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=5\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه: $u_n=v_n-\alpha=5\left(\frac{2}{3}\right)^n-4$. **0,5**

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n): $u_{n+1}-u_n=5\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-5\left(\frac{2}{3}\right)^n=5\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}\right)<0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما. **0,5**

حساب نهاية المتتالية (u_n): $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5\left(\frac{2}{3}\right)^n-4\right)=-4$ (لأن $-1<\frac{2}{3}<1$ منه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$) **0,25**

4) حساب المجموع S_n: **0,5**

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=v_0+v_1\ldots+v_n-(4+4+\ldots+4)$$

$$S_n=5\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}-4(n+1)=15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]-4(n+1)=11-4n-15\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

5) أ) لنبين أن (w_n) متزايدة تماما: **0,75**

$$w_{n+1}-w_n=\frac{5}{v_{n+1}+5}-\frac{5}{v_n+5}=\frac{5v_n+25-5v_{n+1}-25}{(v_{n+1}+5)(v_n+5)}=\frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)}{(v_{n+1}+5)(v_n+5)}$$

بما أن: $v_n=5\left(\frac{2}{3}\right)^n>0$ و $5\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)>0$ فإن: $0<w_{n+1}-w_n$ و منه المتتالية (w_n) متزايدة تماما.

ب) لنبين أن (u_n) و (w_n) متجاورتان: **0,5**

لدينا: المتتالية (u_n) متناقصة تماما و المتتالية (w_n) متزايدة تماما

كما أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{v_n+5}-5\right)=1-5=-4$ (لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$) منه: $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n-u_n)=(-4+4)=0$.

و بالتالي فإن المتتاليتين (u_n) و (w_n) متجاورتان.

ج) حساب المجموع T_n: **0,75**

$$T_n=\frac{1}{w_0+5}+\frac{1}{w_1+5}+\ldots+\frac{1}{w_n+5}=\frac{v_0+5}{5}+\frac{v_1+5}{5}+\ldots+\frac{v_n+5}{5}$$

$$T_n=\frac{1}{5}(v_0+v_1+\ldots+v_n)+1+1+\ldots+1=3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]+(n+1)=4+n-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

التمرين الرابع: **07,25**

1) أ) حساب النهايتين: **3* 0,25**

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\right)$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0\right)$ لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y=1$ عند $-\infty$.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f و إنشاء جدول التغيرات: **4* 0,25**

f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f'(x)=-2xe^x-x^2e^x$

$f'(x)=e^x\left(-x^2-2x\right)$

إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $\left(-x^2-2x\right)$ لأن $e^x>0$.

منه: الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-2]$ و $[0;+\infty[$ ؛ متزايدة تماما على $[-2;0]$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$1-4e^{-2}$	↗	1	↘	$-\infty$

ج) تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}7<\alpha<0{,}8$:

*) من أجل $x\in]-\infty;0]$ فإن: $f(x)\geq 1-4e^{-2}>0$ إذن المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلا على $]-\infty;0]$. **0,25**

*) f مستمرة و متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ وبما أن: $f(0{,}7)\approx 0{,}01>0$ و $f(0{,}8)\approx -0{,}42<0$ **0,25**

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل على $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث $0{,}7<\alpha<0{,}8$.

2) تبيين أن المنحني (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :

f' تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f''(x)=e^x(-x^2-2x)+(-2x-2)e^x=e^x(-x^2-4x-2)$ — **0,25**

إشارة $f''(x)$ مثل إشارة $(-x^2-4x-2)$ لأن $e^x>0$ — **0,25**

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$f''(x)$ انعدمت مرتين مغيرة إشارتها إذن لـ (C_f) نقطتا انعطاف، إحداثياهما : $(-0,6;0,8)$ و $(-3,4;0,6)$ (النتائج مدورة) — **0,25**

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1:

$(T):\ y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ أي: $(T):\ y=e^{-1}(x+1)+1-e^{-1}$ منه: $(T):\ y=e^{-1}x+1$ — **0,5**

4) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة h :

h تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $h'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$

إشارة $h'(x)$ مثل إشارة $(1+x)$ لأن $e^x>0$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

و بالتالي h متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ و متزايدة تماما على $[-1;+\infty[$. — **3*0,25**

*) و منه الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى $h(-1)=e^{-1}-e^{-1}=0$ ؛ وبالتالي $h(x)\ge 0$ على $\mathbb{R}$. — **0,25**

ب) التحقق من المساواة: من أجل كل عدد حقيقي x ،

$f(x)-(1+e^{-1}x)=1-x^2e^x-1-e^{-1}x$

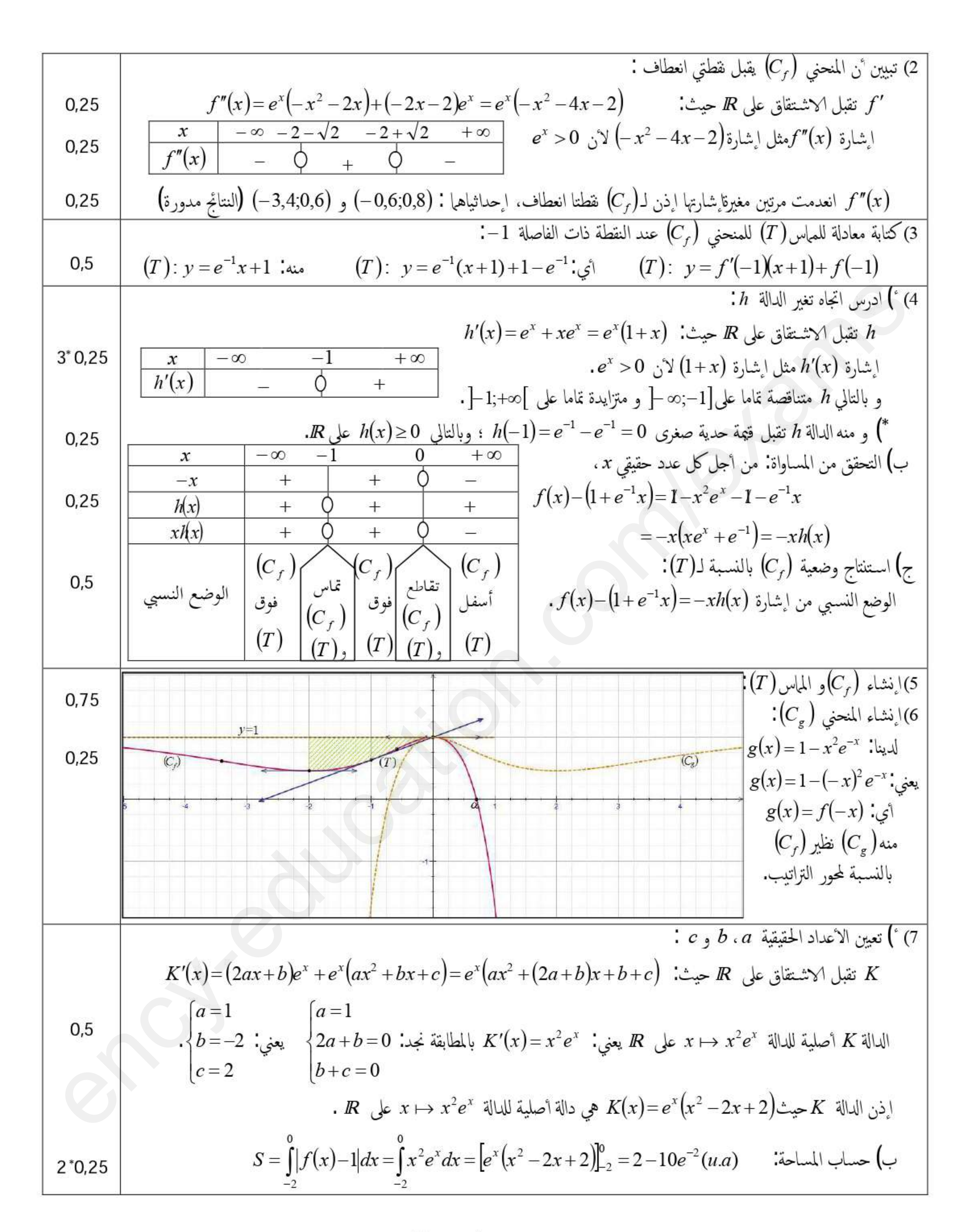
$=-x(xe^x+e^{-1})=-xh(x)$ — **0,25**

ج) استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T):

الوضع النسبي من إشارة $f(x)-(1+e^{-1}x)=-xh(x)$. — **0,5**

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$+$	0	$+$		$+$	
$xh(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (T)	تماس (C_f) و (T)	(C_f) فوق (T)	تقاطع (C_f) و (T)	(C_f) أسفل (T)	

5) إنشاء (C_f) و المماس (T): — **0,75**



6) إنشاء المنحني (C_g): — **0,25**

لدينا: $g(x)=1-x^2e^{-x}$

يعني: $g(x)=1-(-x)^2e^{-x}$

أي: $g(x)=f(-x)$

منه (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

7) أ) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

K تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $K'(x)=(2ax+b)e^x+e^x(ax^2+bx+c)=e^x(ax^2+(2a+b)x+b+c)$

الدالة K أصلية للدالة $x\mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$ يعني: $K'(x)=x^2e^x$ بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\2a+b=0\\b+c=0\end{cases}$ يعني: $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=2\end{cases}$. — **0,5**

إذن الدالة K حيث $K(x)=e^x(x^2-2x+2)$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب) حساب المساحة: $S=\int_{-2}^{0}|f(x)-1|dx=\int_{-2}^{0}x^2e^xdx=\left[e^x(x^2-2x+2)\right]_{-2}^{0}=2-10e^{-2}(u.a)$ — **2*0,25**

انتهى حل الموضوع الأول

مديرية التربية لولاية غرداية	تصحيح نموذجي لاختبار البكالوريا التجريبي	دورة: ماي 2022
الشعبة: علوم تجريبية	مادة الرياضيات	المدة: 3 ساعات ونصف

الموضوع الثاني	العلامة
التمرين الأول:	**04**
1) المعادلة: $\log^3(x)-2\log^2(x)-3\log(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول: ---------> **صحيح** التبرير: $\log^3(x)-2\log^2(x)-3\log(x)=0$ تكافئ: $\begin{cases}\log^3(x)-2\log^2(x)-3\log(x)=0\\ \log(x)=X\end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases}X(X^2-2X-3)=0\\ \log(x)=X\end{cases}$ تكافئ: $\log(x)=0$ أو $\log(x)=-1$ أو $\log(x)=3$ تكافئ: $x=1$ أو $x=10^{-1}$ أو $x=10^3$.	0,25 0,75
2) التكامل: إذا كانت الدالة f مستمرة و فردية على $[-a;a]$ فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ ---------> **صحيح** التبرير: f مستمرة على $[-a;a]$ إذن تقبل عليه دالة أصلية F و كذلك: $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx...(1)$ و بما أن f فردية فإن: $f(x)=-f(-x)$ بالتعويض في (1) نجد: $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} -f(-x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$ إذن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx=[F(-x)]_{-a}^{0}+[F(x)]_{0}^{a}=F(0)-F(a)+F(a)-F(0)=0$.	0,25 0,75
3) احتمال الحادثة B يساوي $0,5$ ---------> **خطأ** التبرير: نعلم أن $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ وبما أن A و B مستقلتان فإن: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$ أي أن: $0,7=0,2+P(B)(1-0,2)$ منه: $P(B)=\frac{0,5}{0,8}=0,625$.	0,25 0,75
4) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\|(1-i\sqrt{3})z\|=4$ هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $r=1$ ---------> **خطأ** التبرير: $\|(1-i\sqrt{3})z\|=4$ تكافئ: $\|(1-i\sqrt{3})\|.\|z\|=4$ تكافئ: $\sqrt{1+3}.\|z\|=4$ تكافئ: $\|z\|=2$ تكافئ: $OM=2$ وبالتالي: مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $r=2$.	0,25 0,75
التمرين الثاني:	**04**
1) حساب احتمال الحوادث A، B و C: أ) $P(A)=\frac{A_4^3}{A_8^3}=\frac{24}{336}=\frac{1}{14}$ ؛ $P(B)=\frac{A_4^3+A_4^3}{A_8^3}=\frac{2\times 24}{336}=\frac{1}{7}$ ؛ $P(C)=\frac{A_4^3+6\times C_4^1\times C_4^2}{A_8^3}=\frac{24+144}{336}=\frac{1}{2}$.	3 * 0,5
ب) $P(B\cap C)=\frac{A_4^3}{A_8^3}=\frac{24}{336}=\frac{1}{14}$، بما أن $P(B)\times P(C)=\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{14}=P(B\cap C)$ فإن الحادثتين B و C مستقلتان.	0,75
2) أ) تعريف قانون الاحتمال: مجموعة القيم الممكنة لـ X هي: $\{4;5;6\}$. $P(X=4)=\frac{C_n^2}{C_{n+4}^2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{2!(n+2)!}{(n+4)!}=\frac{n\times(n-1)}{(n+3)(n+4)}=\frac{n^2-n}{n^2+7n+12}$ ؛ $P(X=5)=\frac{C_n^1\times C_4^1}{C_{4+n}^2}=\frac{8n}{n^2+7n+12}$ $P(X=6)=\frac{C_4^2}{C_{4+n}^2}=\frac{12}{n^2+7n+12}$ (جدول قانون الاحتمال أدناه) *) حساب الأمل الرياضياتي: $E(X)=\frac{4(n^2-n)+5\times 8n+6\times 12}{n^2+7n+12}=\frac{4n^2+36n+72}{n^2+7n+12}$.	0,25 0,75 0,25
ب) استنتاج عدد القريصات السوداء حيث $E(X)=5$: تكافئ: $\frac{4n^2+36n+72}{n^2+7n+12}=5$ تكافئ $4n^2+36n+72=5n^2+35n+60$ تكافئ $n^2-n-12=0$ تكافئ $n=4$ أو $n=-3$ (مرفوض).	0,5

$x_i=$	4	5	6	Σ
$P_i=$	$\frac{n^2-n}{n^2+7n+12}$	$\frac{8n}{n^2+7n+12}$	$\frac{12}{n^2+7n+12}$	1

05	التمرين الثالث :
0,5 0,5 0,25 0,25	I. 1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le -\frac{3}{2}$ *) لدينا: $u_0 = -\frac{5}{2}$ و $-\frac{5}{2} \le -\frac{3}{2}$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$. *) نفرض أنه من أجل عدد طبيعي كيفي n : $u_n \le -\frac{3}{2}$ و لنثبت أن: $u_{n+1} \le -\frac{3}{2}$ لدينا من الفرضية $u_n \le -\frac{3}{2}$ ومنه: $\frac{1}{3}u_n - 1 \le \frac{1}{3}(-\frac{3}{2}) - 1$ أي: $u_{n+1} \le -\frac{3}{2}$ إذن الخاصية محققة من أجل $n+1$. *) الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le -\frac{3}{2}$. ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n): $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n - 1 - u_n = \frac{-2u_n - 3}{3}$ و بما أن: $u_n \le -\frac{3}{2}$ فإن: $\frac{-2u_n-3}{3} \ge 0$ إذن: المتتالية (u_n) متزايدة. *) استنتاج التقارب: (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ $-\frac{3}{2}$ (لأن: $u_n \le -\frac{3}{2}$) إذن هي متقاربة نحو $l \le -\frac{3}{2}$. ج) حساب النهاية: $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$ (لأن (u_n) متقاربة) و لدينا: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$ منه: $l = \frac{1}{3}l - 1$ أي: $\frac{2}{3}l = -1$ و بالتالي: $l = -\frac{3}{2}$.
0,75	2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$ *) لدينا: $u_0 = -\frac{5}{2}$ و $-\left(\frac{1}{3}\right)^0 - \frac{3}{2} = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$. *) نفرض أنه من أجل عدد طبيعي كيفي n: $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$ و لنثبت أن: $u_{n+1} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{3}{2}$ لدينا من الفرضية: $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$ منه: $\frac{1}{3}u_n - 1 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2} - 1$ أي: $u_{n+1} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{3}{2}$. *) الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$.
0,5	II. 1) إثبات أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $v_{n+1} = v_n + u_n + \frac{3}{2}$ يعني: $v_{n+1} - v_n = u_n + \frac{3}{2} = -\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$ منه (v_n) متناقصة تماما.
0,75	2) أ) الإثبات بالتراجع أنه من أجل كل $n \in IN^*$: $v_n = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1})$ *) من الخاصية نجد: $v_1 = -1$ و نعلم أن: $v_1 = v_0 + u_0 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=1$. *) نفرض من أجل $n \in IN^*$ كيفي: $v_n = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1})$ لنثبت أن: $v_{n+1} = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n)$ لدينا من الفرضية $v_n = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1})$ ونعلم أن: $v_{n+1} - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (من الجواب السابق) منه: $v_{n+1} = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}) - \left(\frac{1}{3}\right)^n = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n)$. الخاصية محققة من أجل $n+1$ *) الخلاصة: من أجل من أجل كل $n \in IN^*$: $v_n = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1})$.

ب) استنتاج عبارة v_n بدلالة n:

من أجل كل $n \in IN^*$: $v_n = -(1+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2+...+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}) = -\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n)$ — 0,5

(مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$)

و بما أن: $-\frac{3}{2}(1-\left(\frac{1}{3}\right)^0) = 0 = v_0$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = -\frac{3}{2}(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n)$.

ج) حساب النهاية: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\frac{3}{2}$ (لأن $-1<\frac{1}{3}<1$ منه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$). — 0,25

*) استنتاج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان:

المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (v_n) متناقصة وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 0$ فإن (u_n) و (v_n) متجاورتان. — 0,25

3) تبيين أنه من أجل كل $n \in IN$: $\ln(\frac{2}{3}v_0+1)+\ln(\frac{2}{3}v_1+1)...+\ln(\frac{2}{3}v_n+1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\ln(3)$ — 0,5

من أجل كل $n \in IN$: $\frac{2}{3}v_n+1 = -(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n)+1 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ومنه: $\ln(\frac{2}{3}v_n+1) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)^n = n\ln\left(\frac{1}{3}\right)$.

إذن:

$$\ln(\frac{2}{3}v_0+1)+\ln(\frac{2}{3}v_1+1)...+\ln(\frac{2}{3}v_n+1) = 0\times\ln\left(\frac{1}{3}\right)+1\times\ln\left(\frac{1}{3}\right)+...+n\times\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= (0+1+...+n)\times\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\ln(3)$$

التمرين الرابع: — 07

I. 1) حساب النهايتين: — 3* 0,25

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty}(X^2\ln(X)-2) = +\infty$ (بوضع $|x-1| = X$ و لأن $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X) = +\infty$) ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) أ) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند 1: الدالة f معرفة عند 1 و بجواره: — 0,5

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-1)^2\ln|x-1|}{x-1} = \lim\limits_{X\to0^+} X\ln X = 0$ و $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{X\to0^+} -X\ln X = 0$.

إذن: الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 حيث: $f'(1) = 0$.

بيانيا: نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا معامل توجيهه 0 (أي مماسا أفقيا). — 0,25

ب) تبيين عبارة المشتقة من أجل كل $x \neq 1$: — 0,75

f تقبل الاشتقاق على $]-\infty;1[$ و: $f'(x) = 2(x-1)\ln(-(x-1))+\frac{-1}{-(x-1)}(x-1)^2 = (x-1)(1+2\ln(-(x-1)))$

f تقبل الاشتقاق على $]1;+\infty[$ و: $f'(x) = 2(x-1)\ln(x-1)+\frac{1}{(x-1)}(x-1)^2 = (x-1)(1+2\ln(x-1))$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: $f'(x) = (x-1)(1+2\ln|x-1|)$.

ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها: — 0,5

$1+2\ln|x-1| = 0$ تكافئ: $|x-1| = e^{-\frac{1}{2}}$ يعني: $x = 1+e^{-\frac{1}{2}}$ أو $x = 1-e^{-\frac{1}{2}}$

$1+2\ln|x-1| > 0$ تكافئ: $|x-1| > e^{-\frac{1}{2}}$ يعني: $x > 1+e^{-\frac{1}{2}}$ أو $x < 1-e^{-\frac{1}{2}}$

x	$-\infty$		$1-e^{-\frac{1}{2}}$		1		$1+e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1+2\ln\|x-1\|$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2-0,5e^{-1}$	↗	-2	↘	$-2-0,5e^{-1}$	↗	$+\infty$

0,25

العلامة	عناصر الإجابة
0,25	الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;1-e^{-\frac{1}{2}}]$ و $[1;1+e^{-\frac{1}{2}}]$ ؛ متزايدة تماما على $[1-e^{-\frac{1}{2}};1]$ و $[1+e^{-\frac{1}{2}};+\infty[$.
0,5 0,25 0,25 0,25	3) أ) تبيين أن المستقيم ذا المعادلة $x=1$ محور تناظر لـ (C_f): *) $D_f=\mathbb{R}$ فهي متناظرة بالنسبة لـ 1 ؛ و من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: *) $f(1-x)-f(1+x)=(1-x-1)^2\ln\|1-x-1\|-(1+x-1)^2\ln\|1+x-1\|=x^2\ln\|x\|-x^2\ln\|x\|=0$. إذن: المنحني (C_f) متناظر بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $x=1$. ب) تبيين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين أي أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين: *) الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $[1+e^{-\frac{1}{2}};+\infty[$ وبما أن: $f(2,83)\approx 0,02>0$ و $f(2,82)\approx -0,02<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على $]1+e^{-\frac{1}{2}};+\infty[$ حلا وحيدا α حيث: $2,82<\alpha<2,83$. *) الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]-\infty;1-e^{-\frac{1}{2}}]$ وبما أن: $f(1-e^{-\frac{1}{2}})<0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)>0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على $]-\infty;1-e^{-\frac{1}{2}}[$ حلا وحيدا β . *) من التناظر نستنتج أن $\beta=2(1)-\alpha$ أي: $2-2,83<\beta<2-2,82$ إذن: $-0,83<\beta<-0,82$.
0,5	4) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 $(T):\ y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ أي: $(T):\ y=-(2+4\ln(2))(x+1)+4\ln(2)-2$ منه: $(T):\ y=-(2+4\ln(2))x-4$
0,75	5) إنشاء المنحني (C_f) و المماس (T) على المجال $[-2;4]$:
0,25 0,25 0,25	II. 1) حساب الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto(x-1)^2\ln(x-1)$ على $]1;+\infty[$ و التي تنعدم عند 2 و لتكن H: الدالة H معرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $H(x)=\int_2^x(t-1)^2\ln(t-1)dt$ نضع: $\begin{cases}u(t)=\ln(t-1)\\ v'(t)=(t-1)^2\end{cases}$ حيث: $\begin{cases}u'(t)=\dfrac{1}{t-1}\\ v(t)=\dfrac{1}{3}(t-1)^3\end{cases}$ نجد: $H(x)=\left[\frac{1}{3}(t-1)^3\ln(t-1)\right]_2^x-\int_2^x\frac{1}{3}(t-1)^2dt$ أي: $H(x)=\frac{1}{3}(x-1)^3\ln(x-1)-\frac{1}{9}\left[(t-1)^3\right]_2^x=\frac{1}{3}(x-1)^3\ln(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^3+\frac{1}{9}$.
0,25 0,25	2) حساب المساحة $A(\alpha)$: $A(\alpha)=\int_2^{\alpha}\|f(x)-(-2)\|dx=[H(x)]_2^{\alpha}=\frac{1}{3}(\alpha-1)^3\ln(\alpha-1)-\frac{1}{9}(\alpha-1)^3+\frac{1}{9}u.a.....(1)$ نعلم أن: $f(\alpha)=(\alpha-1)^2\ln(\alpha-1)-2=0$ يعني: $\ln(\alpha-1)=\dfrac{2}{(\alpha-1)^2}$ بالتعويض في (1) نجد: $A(\alpha)=\frac{1}{3}(\alpha-1)^3\times\frac{2}{(\alpha-1)^2}-\frac{1}{9}(\alpha-1)^3+\frac{1}{9}=\frac{2}{3}(\alpha-1)-\frac{1}{9}(\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1)+\frac{1}{9}$ إذن: $A(\alpha)=\frac{1}{9}(6\alpha-6-\alpha^3+3\alpha^2-3\alpha+1+1)=\frac{1}{9}(-\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha-4)u.a$.

انتهى حل الموضوع الثاني



مؤسسة التربية و التعليم الخاصة
أوبينيا تر



Email: saitameur3@gmail.com 023 71 54 67 :فاكس 023 71 54 63 / 0550 47 22 35 :رقم الهاتف

المستوى:الثالثة علوم تجريبية **ماي 2022**

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات / المدة : 3 ساعات و نصف.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين 1 (4 ن)

المطلوب اختيار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة مبررا الاختيار.

		أ	ب	ج
1	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ تساوي :	1	e	$\frac{1}{e}$
2	احد حلول المعادلة التفاضلية $y''+4e^{-2x}=0$ هو الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$:	$y=-e^{-2x}$	$y=\frac{2}{e^{2x}}$	$y=\frac{-2}{e^{2x}}$
3	قسم يتكون من 18 تلميذا و 12 تلميذة نريد تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبا و أمينا ، عدد اللجان بحيث يكون الرئيس ولدا و الأمين بنتا هو	6084	6048	4068
4	لتكن $f(x)=8x^3+1$ ، الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم من أجل $x=1$ معرفة بـ	$F(x)=x^4+1$	$F(x)=3x^4+1$	$F(x)=2x^4+x-3$

التمرين 2 (4 ن)

يحتوي صندوق U_1 على سبع كريات منها خمس حمراء مرقمة بـ 1 ، 1 ، 1 ، 0 ، 2 و كريتين خضراوين مرقمة بـ 1 ، 0 و يحتوي صندوق U_2 على سبع كريات منها ثلاث حمراء مرقمة بـ 2 ، 2 ، 1 و اربعة خضراء مرقمة بـ 2 ، 1 ، 0 ، 0 (الكريات لا نفرق بينها باللمس).

نرمي زهر نرد غير مزيف ذو ستة اوجه مرقمة من 1 الى 6، بحيث اذا ظهر الرقمان 2 و 4 نسحب عشوائيا كريتين من الصندوق U_1 على التوالي دون ارجاع ،و في باقي الحالات

نسحب كريتين في آن واحد من الصندوق U_2 .

1) لتكن الحادثتين A و B حيث :

A " سحب كريتين من نفس اللون" .
B : "سحب كريتين من نفس الرقم "
أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمال A و B على الترتيب.

2) هل الحادثتين A و B مستقلتين ؟ علل.

3) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس الرقم ،ما هو احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_1 .

4) نعيد التجربة حيث نسحب الآن من U_1 كرتين في آن واحد و نضعها في الصندوق U_2 ، ثم نسحب كرتين على التوالي دون ارجاع من U_2 .

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب الكرات الحمراء المسحوبة.

أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ج)أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 3 (5 ن)

I)نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3}$

1) ارسم في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$

2) مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 باستعمال الرسم السابق و دون حساب الحدود.

3) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

4) برهن بالتراجع أنه و من أجل كل عدد طبيعي n أن: $1\le u_n<4$

5) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

II) نعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n=u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم .

1) عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0

- نضع $\alpha=-4$

أ) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

ب) تحقق من صحة تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n) .

ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+....+u_n$

التمرين 4 (7 ن)

I) g دالة عددية معرفة على المجال $]0\ ,\ +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

1)أدرس تغيرات الدالة g.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[1\ ;1.5]$

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\ ,\ +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2+1-\ln x}{x}$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود أطراف مجال تعريفها. ماذا تستنتج ؟.

2) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0\ ,\ +\infty[$ فإن: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ).

5) بيّن أن $f(\alpha) = 2\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

6) أنشئ (C_f) و (Δ) .

7) أ) جد الدالة الأصلية للدالة : $x \mapsto (1-\ln x)\dfrac{1}{x}$ و التي تنعدم من أجل $x = e$

ب) أحسب المساحة $S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x = \alpha\ ,\ x = 1\ ,\ y = x$ حيث α العدد المشار إليه في الجزء I

ج) تحقق أن: $S(\alpha) = \dfrac{\alpha^2(2-\alpha^2)}{2}$

انتهى الموضوع الأول.

الموضوع الثاني

التمرين 1 (4 ن)

اجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات التالية:

1) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\ ,\ +\infty[$ كما يلي : $f(x)=2x+ln(\frac{x+1}{2x})$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=2x$.

2) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3x+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة زوجية.

3) للمعادلة $2\ ln(x)-ln(5x-6)=0$ حلان متمايزان هما 3 و 2.

4)المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_n=-3\ (\frac{1}{4})^n$ هي متتالية متزايدة.

التمرين 2 (4 ن)

يحتوي وعاء على 3 قريصات بيضاء و 4 حمراء ، إحدى القريصات البيضاء تحمل الرقم 1 والأخريان تحملان الرقم 5 أما القريصات الحمراء فإثنتان منهما تحملان الرقم 2 و الأخريان تحملان الرقم 3 .

نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد .

نعتبر الحادثتين A وB حيث :

A " مجموع الرقمين المسحوبين أكبر تماما من 6 ".

B " الحصول على القريصتين بيضاوين ".

1) أحسب $P(A)$ و$P(B)$ احتمال A و B على الترتيب.

2) ماهو احتمال أن يكون مجموع الرقمين المسحوبين أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاويتين ؟

3) نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب قريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

أ)عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثم أحسب الإنحراف المعياري σ (X) .

التمرين 3 (5 ن)

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$$

1) أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة ، و عين نهايتها.

2) أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}\ (u_n - 1)$

ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_{n+1} - 1 \leq (\frac{1}{2})^n$

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \dfrac{u_n-1}{2u_n-1}$

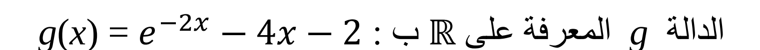
ا) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

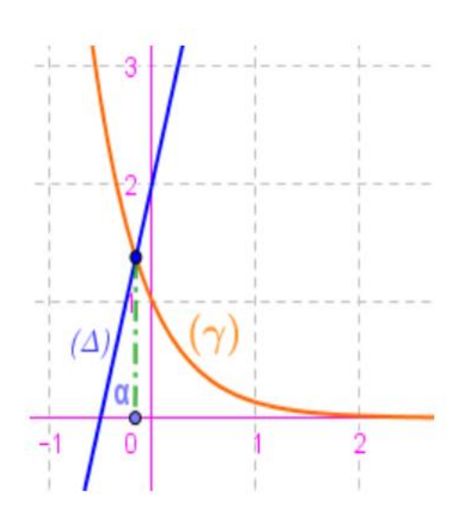
ج) احسب بدلالة n المجموع L_n حيث : $L_n = \frac{V_0-1}{u_0} + \frac{V_1-1}{u_1} + \dots + \frac{V_n-1}{u_n}$

التمرين 4 (7 ن)

I) الشكل التالي هو التمثيل البياني (γ) للدالة $x \to e^{-2x}$ و المستقيم (Δ) ذو المعادلة



$y=4x+2$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).



الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = e^{-2x} - 4x - 2$

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) .

ثم استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) تحقق أن $-0.16 < \alpha < -0.15$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 3 - 2xe^{2x}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{2x}g(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ- أثبت أن المستقيم (d) الذي معادلته $y = x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) .

4) بين أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}$

5) ارسم (C_f) و (d) . (نأخذ $f(\alpha) = 3.07$)

6) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (d) يُطلب تعيين معادلته.

7) عين بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

أ) x عدد حقيقي ، باستعمال التكامل بالتجزئة احسب : $\int_0^x 2te^{2t}dt$

ب) λ عدد حقيقي اصغر تماما من 0 ، احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات : $x = 0$ ، $x = \lambda$ و $y = x + 3$

انتهى الموضوع الثاني

بالتوفيق في شهادة البكالوريا ☺- أستـــــاذة المادة –

التصحيح النموذجي

الموضوع الأول

رقم التمرين	الحل	التنقيط
التمرين 1	**1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ تساوي e: اذن **الجواب الصحيح هو ب)** **2)** احد حلول المعادلة التفاضلية $y''+4e^{-2x}=0$ هو الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$: هو $y=-e^{-2x}$ اذن **الجواب الصحيح هو أ)** **3)** قسم يتكون من 18 تلميذا و 12 تلميذة نريد تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبا و أمينا ، عدد اللجان بحيث يكون الرئيس ولدا و الأمين بنتا هو 6048 اذن **الجواب الصحيح هو ب)** **4)** لتكن $f(x)=8x^3+1$ ، الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم من أجل $x=1$ معرفة بـ $F(x)=2x^4+x-3$ اذن **الجواب الصحيح هو ج)**	1 ن 1 ن 1 ن 1 ن

التمرين 2

ملاحظة : في هذة الحالة كل صندوق له إحتمال سحب حيث $P(U_1)=\frac{1}{3}$ و $P(U_2)=\frac{2}{3}$.

عدد الحالات الممكنة للسحب من الصندوق U_1 هي : $A_7^2=42$ و من الصندوق U_2 هي : $C_7^2=21$. — 0.5 ن

❶ حساب إحتمالات الحوادث :

$P(A)=29/63$; $P(B)=17/63$ — 0.5 ن

2) الحادثتين A و B غير مستقلتين لأن — 0.5 ن

لدينا $P(A\cap B)=\frac{7}{63}$ و منه

$P(A)\times P(B)\neq P(A\cap B)$

3) علما أن الكريتيين المسحوبتين من نفس الرقم ،ما هو احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_1 . — 0.75 ن

$P_B(U_1)=\frac{P(U_1\cap B)}{P(B)}=\frac{7}{17}$.

4)أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X .

قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0,1,2\}$. — 0.75 ن

$P(X=0)=\frac{C_5^2}{C_7^2}\times\frac{A_4^2}{A_9^2}+\frac{C_2^2}{C_7^2}\times\frac{A_6^2}{A_9^2}+\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}\times\frac{A_5^2}{A_9^2}=\frac{175}{756}$.

ب) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X — 0.5 ن

$P(X=1)=\frac{C_5^2}{C_7^2}\times\frac{2\times A_4^1A_5^1}{A_9^2}+\frac{C_2^2}{C_7^2}\times\frac{2\times A_6^1A_3^1}{A_2^9}+\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}\times\frac{2\times A_4^1A_5^1}{A_9^2}=\frac{418}{756}$.

$p(X=2)=\frac{C_5^2}{C_7^2}\times\frac{A_5^2}{A_9^2}+\frac{C_2^2}{C_7^2}\times\frac{A_3^2}{A_2^9}+\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}\times\frac{A_4^2}{A_9^2}=\frac{163}{756}$.

— 0.75 ن

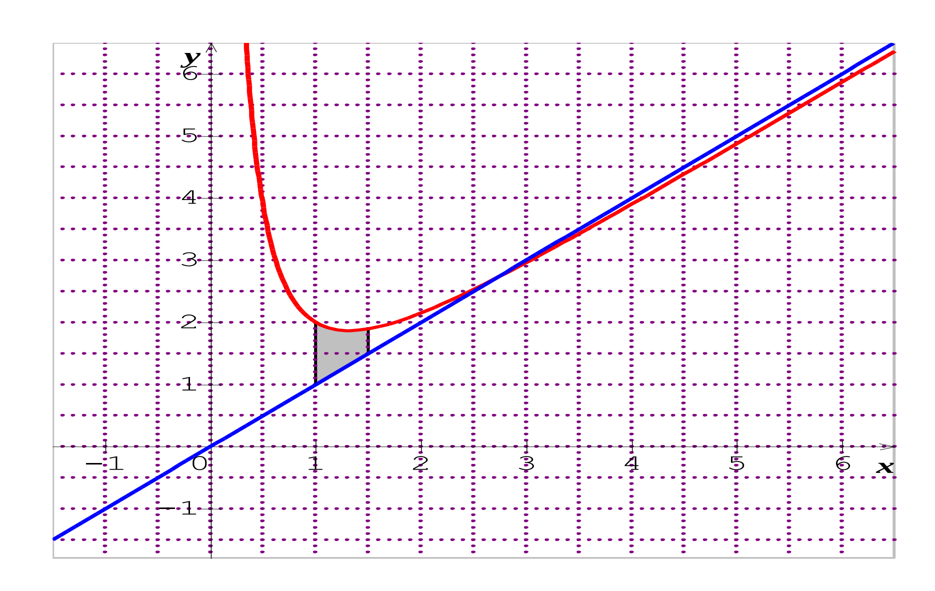
2	1	0	$X=x_i$
$\frac{163}{756}$	$\frac{418}{756}$	$\frac{175}{756}$	$P(X=x_i)$

ج) الأمل الرياضياتي $E(X)$ — 0.25 ن

$E(X)=\frac{744}{756}\cong 0.9$

العلامة	عناصر الإجابة	المحاور
0.5 ن	1) الرسم	التمرين 3
0.5 ن	2) تمثيل على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2	
0.25 ن	التخمين : يبدو أن (u_n) متزايدة و متقاربة نحو العدد 2	
0.5 ن	استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات : $1 \leq u_n \leq 4$	
0.5 ن	اتجاه التغير (u_n) : (u_n) متتالية متزايدة	
0.5 ن	(u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 4 فهي متقاربة	
0.5 ن	3) (v_n) هندسية من أجل $\alpha = -4$ $q = \frac{2}{3}$ و $v_0 = -3$	
0.75 ن	4) أ) $v_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $u_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4$	
0.5 ن	ب) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$	
0.5 ن	جـ) $S_n = 9\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right] + 4(n+1)$	

التمرين		
التمرين 4	1) النهايات $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	0.5 ن
	ب) $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ومنه $g'(x) > 0$ إذن هي دالة متزايدة تماما على المجال $]0\,,\,+\infty[$	0.25 ن
	جدول التغيرات	0.25 ن
	2) مبرهنة القيم المتوسطة	0.5 ن
	إشارة $g(x)$ سالبة على المجال $]0\,;\,\alpha]$ و موجبة على المجال $[\alpha\,;\,+\infty[$	0.5 ن
	II) 1) $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$	0.5 ن
	إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ f متناقصة على $]0;\alpha]$ و f متزايدة على $[\alpha;+\infty[$	0.25 ن
	2) النهايات $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	0.5 ن
	جدول التغيرات	0.5 ن
	3) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ (d) ذو المعادلة : $y=x$ مقارب لـ (c_f)	0.5 ن
	$f(x)-y=\frac{1-\ln x}{x}$ (c_f) فوق (d) على $]0;e[$ و (c_f) تحت (d) على $]e;+\infty[$ $(c_f)\cap(d)=\{(e;e)\}$	0.5 ن
	4) إثبات أن : $f(\alpha)=2\alpha-\frac{1}{\alpha}$ والحصر : $1<f(\alpha)<\frac{7}{2}$	0.75 ن

	5) الرسم 	0.5 ن
	6) أ) الدالة الأصلية h : $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2-\frac{1}{2}$	0.5 ن
	ب) $S_{(\alpha)}=\int_1^{\alpha}[f(x)-x]dx=\frac{(2-\ln\alpha)\ln\alpha}{2}$	
	جـ) $\ln\alpha=2-\alpha^2$ و $S_{(\alpha)}=\frac{\alpha^2(2-\alpha^2)}{2}$	0.5 ن

الموضوع الثاني

رقم التمرين	الحل	التنقيط
التمرين 1	1) الدالة f المعرفة على $]0\ ,\ +\infty[$ كما يلي : $f(x)=2x+ln(\frac{x+1}{2x})$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=2x$. خطأ	1 ن
	2) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3x+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة زوجية. خطأ بل دالة فردية	1 ن
	3) للمعادلة $2\ ln(x)-ln(5x-6)=0$ حلان متمايزان هما 3 و 2. **صحيح**	1 ن
	4)المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_n=-3\ (\frac{1}{4})^n$ هي متتالية متزايدة **صحيح**	1 ن

التمرين 2	عدد الحالات الممكنة هي : $C_7^2 = 21$ 1) احتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 هو : $$P(A) = \frac{9}{21}$$ $P(B)=\frac{3}{21}$ 2) احتمال أن يكون المجموع أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاوين : $P(C) = \frac{1}{21}$ 3)ا) تعيين قيم المتغير العشوائي: $X = \{3,4,5,6,7,8,10\}$ ب) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي : $$P(X=3) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{21} = \frac{2}{21}$$ $$P(X=4) = \frac{C_2^2 + C_1^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_2^1}{21} = \frac{3}{21}$$ $$P(X=5) = \frac{4}{21}$$ $$P(X=6) = \frac{3}{21}$$ $$P(X=7) = \frac{4}{21}$$ $$P(X=8) = \frac{4}{21}$$ $$P(X=10) = \frac{C_2^2}{21} = \frac{1}{21}$$	0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.75 ن 0.5 ن 0.75 ن

0.5 ن

$X = x_i$	3	4	5	6	7	8	10	$\sum$
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	1

0.5 ن

ج) حساب الأمل الرياضي :

$$E(X) = \left(3 \times \frac{2}{21}\right) + \left(4 \times \frac{3}{21}\right) + \left(5 \times \frac{4}{21}\right) + \left(6 \times \frac{3}{21}\right) + \left(7 \times \frac{4}{21}\right) + \left(8 \times \frac{4}{21}\right) + \left(10 \times \frac{1}{21}\right) \cong 5.67$$

0.5 ن

حساب التباين والانحراف المعياري :

$V(X) = 7.18$

الانحراف المعياري

$\sigma(X) = \sqrt{v} = 2.68$

التمرين 3

1) أ)

0.5 ن

نسمي $p(n)$ الخاصية : $u_n > 1$

① من أجل $n = 0$: لدينا $u_0 = 2$ و $2 > 1$ إذن $u_0 > 1$

ومنه $p(0)$ صحيحة

② نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي $u_n > 1$ ونبرهن على أن $p(n+1)$ صحيحة أي : $u_{n+1} > 1$

لدينا $u_n > 1$ ومنه $u_n + 2u_n > 1 + 2u_n$

وبالتالي $3u_n - 1 > 2u_n$ ومنه $\frac{3u_n - 1}{2u_n} > 1$

إذن $u_{n+1} > 1$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة

اذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

ب)

ندرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-1}{2u_n}-u_n=\frac{-2u_n^2+3u_n-1}{2u_n}$$

$$=\frac{(-2u_n+1)(u_n-1)}{2u_n}$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n>1$

ومنه $u_n-1>0........(1)$

و $-2u_n<-2$ ومنه $-2u_n+1<-1$ أي أن

$-2u_n+1<0........(2)$

وكذلك $2u_n>0........(3)$

من (1)و (2) و (3) نستنتج أن $\frac{(-2u_n+1)(u_n-1)}{2u_n}<0$

أي $u_{n+1}-u_n<0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

بماأن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل

بـ 1 فإن (u_n) متقاربة.

0.5 ن

2) ا)

$u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}(u_n-1)$: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

0.25 ن

$$u_{n+1}-1=\frac{3u_n-1}{2u_n}-1=\frac{u_n-1}{2u_n}=\frac{1}{2u_n}(u_n-1)$$

ولدينا $u_n>1$ ومنه $2u_n>2$ إذن $\frac{1}{2u_n}<\frac{1}{2}$

بضرب الطرفين في العدد الموجب (u_n-1) نحصل على

$\frac{1}{2u_n}(u_n-1)<\frac{1}{2}(u_n-1)$ ومنه $u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}(u_n-1)$

0.75 ن

ب)

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

ومنه $0 < u_1 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_0 - 1)$

$0 < u_2 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_1 - 1)$

$0 < u_3 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_2 - 1)$

....

$0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - 1)$

بضرب أطراف هذة المتباينات طرفا لطرف نجد :

$$0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 1)$$

وبماأن $u_0 - 1 = 1$ فإن $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(**طريقة 2 :** يمكن إستعمال طريقة البرهان بالتراجع)

0.5 ن

3)

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1} = \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{6u_n - 2 - 2u_n}$$

$$= \frac{u_n - 1}{4u_n - 2} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{3}$

ب. كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 q^n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

كتابة عبارة u_n بدلالة n :

لدينا $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ ومنه $2 v_n u_n - v_n = u_n - 1$ إذن

$(2v_n - 1)u_n = v_n - 1$ ومنه $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$

إذن $$u_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{2\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3}{2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3}$$

0.5 ن

0.5 ن

	جـ حساب بدلالـة n المجموع L_n حيث : $L_n=\frac{v_0-1}{u_0}+\frac{v_1-1}{u_1}+\frac{v_2-1}{u_2}+........+\frac{v_n-1}{u_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n : لدينا $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$ ومنه $\frac{v_n-1}{u_n}=2v_n-1$ إذن $L_n=(2v_0-1)+(2v_1-1)+(2v_2-1)+........+(2v_n-1)$ $=2(v_0+v_1+......v_n)-(1+1+1......+1)$ $=2v_0\frac{1-q^n}{1-q}-(n+1)=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-n-1$ $=-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}-n$	0.5 ن
التمرين 4	1) بقراءة بيانية نحدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) . (γ) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty;\alpha[$ و تحت (Δ) على $]\alpha;+\infty[$ و (γ) يقطع (Δ) في النقطة A ذات الفاصلة α استنتاج اشارة $g(x)$ حسب قيم x . جدول: x : $-\infty$ ، α ، $+\infty$ — $g(x)$: $+$ ، 0 ، $-$ 2) التحقق أن $-0.16<\alpha<-0.15$	0.5 ن 0.5 ن 0.25 ن

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

لدينا: $g(-0.16)\cdot g(-0.15)=0.017\times(-0.05)<0$

ومنه $-0.16<\alpha<-0.15$.

1) حساب النهايات

0.75 ن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+3-2x\,e^{2x}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{3}{x}-2e^{2x}\right)=\boxed{-\infty}$$

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{2x}g(x)$ و استنتاج اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول التغيرات

$f'(x)=e^{2x}g(x)$ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

0.75 ن

$$f'(x)=1-2e^{2x}-4x\,e^{2x}=e^{2x}\left(e^{-2x}-4x-2\right)=\boxed{e^{2x}g(x)}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن :

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول التغيرات

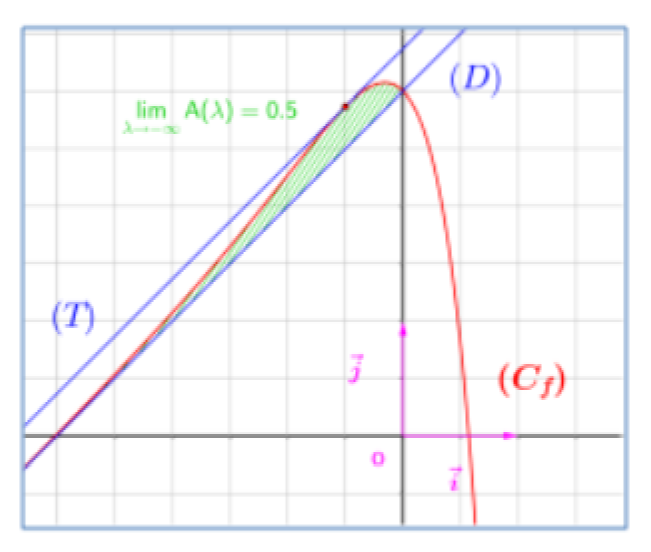
0.5 ن

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ) أثبت أن المستقيم (d) الذي معادلته $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f)

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left(-2x\,e^{2x}\right)=0$ و منه المستقيم (D) ذو المعادلة

$y=x+3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

	الوضع النسبي لدينا $\left[f(x)-(x+3)\right]=-2\,x\,e^{2x}$ و منه إشارة الفرق $\left[f(x)-(x+3)\right]$ هي عكس إشارة x إذن (C_f) يقع تحت (D) على المجال $]0;+\infty[$ و فوق (D) على المجال $]-\infty;0[$ و (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الإحداثيات $(0;3)$.	0.5 ن
	4) نبين أن $f(\alpha)=\frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}$ **لدينا** $g(\alpha)=0$ **معناه:** $e^{-2\alpha}-4\alpha-2=0$ **أي:** $e^{2\alpha}=\frac{1}{4\alpha+2}$ **نعوض في عبارة** f **فنجد:** $f(\alpha)=\alpha+3-2\,\alpha\times\frac{1}{4\alpha+2}$ $=\alpha+3-\alpha\times\frac{1}{2\alpha+1}=\boxed{\frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}}$	0.5 ن 0.5 ن
	5) رسم (C_f) و (d)  	0.5 ن

6) نبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (d) يُطلب تعيين معادلته.

لدينا $f'(x)=1$ تكافئ $-2\ e^{2x}-4\,x\,e^{2x}=0$ أي أن

$-2e^{2x}(2x+1)=0$ ومنه $2x+1=0$ إذن $x=\frac{-1}{2}$.

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D) عند النقطة

ذات الفاصلة $\frac{-1}{2}$ معادلته $y=x+3+\frac{1}{e}$.   0.5 ن

7) تعيين بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين

يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين إذا و فقط إذا كان $3<m<3+\frac{1}{e}$

أ) xعدد حقيقي ، باستعمال التكامل بالتجزئة   0.25 ن

نضع $u(t)=t$ ، $v'(t)=2e^{2t}$

و منه $u'(t)=1$ ، $v(t)=e^{2t}$ إذن

$$\int_0^x 2te^{2t}dt=\left[u(t)v(t)\right]_0^x-\int_0^x u'(t)v(t)\,dt$$

$$=\left[te^{2t}\right]_0^x-\int_0^x e^{2t}\,dt=xe^{2x}-\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^x$$

$$=xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}$$

0.5 ن

ب) λ عدد حقيقي اصغر تماما من 0 ، حساب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=0$ ، $x=\lambda$

	و $y = x + 3$ $$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} \left(f(x) - (x+3) \right) dx = \int_{0}^{\lambda} 2xe^{2x} dx$$ $$= \left[xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} \right]_0^{\lambda} = \left(\lambda e^{2\lambda} - \frac{1}{2}e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \right) ua$$ **ومنه :** $$\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \left(\lambda e^{2\lambda} - \frac{1}{2}e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} ua$$	0.5 ن

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية وهران

المقاطعة الأولى (وهران شرق)

الامتحان التجريبي لبكالوريا 2022في مادة الرياضيات

الشعبة :علوم تجريبية — المدة : ثلاث ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين فقط

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5نقاط) عين الاقتراح الصحيح في كل حالة من الحالات الآتية مع التعليل :

1) العدد $ln\left[(2-\sqrt{3})^{2022}\right]+ln\left[(2+\sqrt{3})^{2022}\right]$ يساوي :

أ- أ) 0 — ب) 20 22 — ج) 1

2) f دالة معرفة على مجال مفتوح يشمل 2،إذا كان منحنى f يقبل مماسا معادلته y=2 فان :

أ- $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=1$ — ب- $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$ — ج- $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=+\infty$

3) حلول المعادلة التفاضلية : $y=\sqrt{2}\,y'-1$ هي الدوال المعرفة على IR بـ :

أ) $f(x)=Ce^{\sqrt{2}x}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ — ب) $f(x)=Ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}-1$ — ج) $f(x)=Ce^{\sqrt{2}x}+1$

4) الدالة g المعرفة على IR بـ: $g(x)=|x-1|(x+1)$, غير قابلة للاشتقاق عند 1 لان نهاية النسبة $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$:

أ)عند 1 هي $+\infty$ — ب)عند 1من يمين 1 , لا تساوي النهاية عند1من يسار — ج) عند 1 هي $-\infty$

5) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث تضم كل لجنة رئيسا و نائبا له ينتخبون من بين خمسة رجال و ثلاث نساء هو :

أ) 56 — ب- 28 — ج- 64

التمرين الثاني :(4نقاط)

نعتبر D_1 ; D_2 زهرتي نرد ذات ستة أوجه حيث :

- وجوه النرد D_1 متساوية الاحتمال , أربعة منها تحمل الرقم 1 و اثنان منها تحمل الرقم 2 .
- وجوه النرد D_2 مرقمة من 1 الى 6 حيث أن احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k هو $\frac{k}{21}$.

1- أ- إذا رمينا النرد D_1 مرة واحدة فما هو احتمال ظهور الرقم 2 ؟.

ب- إذا رمينا النرد D_2 مرة واحدة فما هو احتمال ظهور الرقم 6 ؟.

2- إذا رمينا النردين D_1 ; D_2 معا فما هو احتمال ظهور الرقم 1 :

أ -مرة واحدة بالضبط — ب) مرتين

3- نرمي النردين معا و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية عدد المرات الذي يظهر فيها الرقم 2

أ عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب احسب الأمل ألرياضياتي لهذا المتغير العشوائي

التمرين الثالث:(4نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على IN كما يلي : $u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x}\,dx$

1 ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = e^{2-n} - e^{1-n}$

2 ـ أحسب u_0 ثم برهن بمبدأ الاستدلال بالتراجع . انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

3 ـ برهن ان المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها ألأول

4 ـ أ ـ أحسب بدلالة n الفرق $u_{n+1} - u_n$. ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ب ـ استنتج أن المتتالية (u_n) متقارية ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

5 ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أحسب بدلالة n المجموع S_n , ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الرابع : (7نقاط)

الجزء I : f دالة معرفة على IR بـ : $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث الوحدة 2cm على محور الفواصل و 5cm على محور التراتيب

1 ـ أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2 أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \frac{x+\ln(1+e^{-x})}{e^x}$

ب) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا

3ـ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;-\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$

أ ـ أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$

ب أحسب $g(0)$ ، ثم إشارة $g(x)$ من أجل x موجب تماما

4) أ ـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$

ب ـ استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها

ج ـ مثل بيانيا (C_f)

الجزء II : نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1 ـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$

2 ـ باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$

3 ـ استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0 , x = \ln 4 , y = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول(04ن)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التعليل:

السؤال:	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)
1) حلول المعادلة التفاضلية $y'-2y=1$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ:	$x\mapsto ce^{-2x}+\frac{1}{2}$ مع $c\in\mathbb{R}$	$x\mapsto ce^{2x}-\frac{1}{2}$ مع $c\in\mathbb{R}$	$x\mapsto ce^{\frac{1}{2}x}-2$ مع $c\in\mathbb{R}$
2) القيمة المتوسطة m للدالة f المعرفة على المجال $[2;3]$ بالعبارة $f(x)=e^{2x+3}-x$ تساوي:	$m=\frac{1}{2}(e^9-e^7-5)$	$m=e^2-\frac{5}{2}$	$m=\frac{1}{2}(e^2-5)$
3) من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>2$ يكون: $C_{n-1}^2+C_n^2$ يساوي:	$\frac{1}{2}(n-1)^2$	$(n-1)^2$	n^2-2n
4) عبارة الحد العام U_n للمتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بِ: $u_n=\int_0^n 2^x\ln 2\,dx$ هي:	2^n	2^n+1	2^n-1

التمرين الثاني(05ن)

I) المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأول $u_0=6$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}$

1) أ. في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، مثّل المستقيمين (Δ) و (D) إذا علمت أن : $(\Delta):y=x$ و $(D):y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$

ب. مثّل و دون حساب على حامل محور الفواصل الحدود: u_0، u_1، u_2 و u_3.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n>-\frac{2}{3}$

3) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

II) المتتالية العددية (v_n) معرفة على N بحدها العام V_n:حيث من أجل كل n من N $v_n=u_n+\alpha$ ، α عدد حقيقي.

1) عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$، ثم أحسب حدها الأول.

2) نضع $\alpha=\frac{2}{3}$: أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n. استنتج عبارة u_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثالث (04ن)

نعتبر صندوقين أحدهما U يحتوي على **3** كرات خضراء و **4** كرات حمراء و الآخر U' يحتوي على **كرتين** خضراوين و **5** كرات حمراء، كل الكرات لا نميز بينها باللمس، نرمز للكرات الخضراء بالرمز V و للكرات الحمراء بالرمز R.

I - نسحب عشوائيا من الصندوق U ثلاث كرات في آن واحد. أحسب احتمال كلّ من الحوادث A ، B و C التالية:

◄ A : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون ". ◄ B : " الحصول على كرة خضراء واحدة بالضبط ".

◄ C: " الحصول على كرة حمراء على الأقل ".

II -نختار بطريقة عشوائية صندوقا من بين الصندوقين و نسحب منه كرة واحدة عشوائيا:

1) أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة العشوائية.

2) بيّن أنّ احتمال الحصول على كرة خضراء هو: $P(V)=\dfrac{5}{14}$

3) إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء فما احتمال أن تكون من الصندوق U ؟.

التمرين الرابع(07ن)

يُنسب المستوي إلى المعلم المتعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=4cm$

I - g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

1) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ (**يطلب منك حساب النهايات**)، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $1,8<\alpha<2$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II -الدالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$ و (C_f) هو تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد الحقيقي $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}.

4) عيّن إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل، ثمّ أنشئ المنحنى (C_f).

III - الدالة العددية G معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $G(x)=\dfrac{5}{9}x^3+x-\dfrac{2}{3}x^3\ln x$

1) بيّن أنّ الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) أحسب بدلالة العدد α A_α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g) و حامل محور الفواصل و المستقيمان اللذان معادلاتهما $x=1$ و $x=\alpha$. حيث (C_g) هو المنحنى البياني الممثل للدالة g في المعلم السابق.

التصحيح النموذجي

التمرين الثانى(4نقاط)

1) أ- احتمال ظهور الرقم 2 هو $\frac{}{6}$ أي $\frac{1}{3}$ (0,5)

ب- اذا رمينا النرد D_2 مرة واحدة احتمال ظهور الرقم 6 هو $\frac{6}{21}$ أي $2/7$ (0,5)

2) أ- احتمال ظهور الرقم 1 مرة واحدة بالضبط اي في D_1 فقط او في D_2 فقط $\frac{4}{6}\left(1-\frac{1}{21}\right)+\frac{1}{21}\times\frac{2}{6}=\frac{82}{126}$
(0,5)

ب- مرتين في D_1 و D_2 معا $\frac{4}{6}\times\frac{1}{21}=\frac{4}{126}$ 0,5

3) قيم X هي 2,1,0 0,25

قانون احتمال المتغير العشوائي هو :

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$			

0,25

0,25 $P(X=0)=\frac{4}{6}\left(1-\frac{2}{21}\right)=\frac{4\times19}{126}=\frac{76}{126}$

0,25 $.P(X=1)=\frac{2}{6}\times\left(1-\frac{2}{21}\right)+\frac{2}{21}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{6}\times\frac{19}{21}+\frac{8}{126}=\frac{38+8}{126}=\frac{46}{126}$

0,25 $P(X=2)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{21}=\frac{4}{126}$

0,75 $.E(X)=0\times\frac{76}{126}+1\times\left(\frac{46}{126}\right)+2\left(\frac{4}{126}\right)=\frac{54}{126}=\frac{3}{7}$

التمرين الثالث(4نقاط)

1 - نبين أن $_n=e^{2-n}-e^{1-n}$.

0,5 $.u_n=\int_n^{n+1}e^{2-x}dx=-[e^{2-x}]_n^{n+1}=-[e^{1-n}-e^{2-n}]=e^{2-n}-e^{1-n}$

2 - حساب u_0 *ثم البرهان بالتراجع ان* $u_n>0$.

نضع $P(n):u_n>0$

حساب $_0$: $u_0=e^2-e$ ... 0,25

المرحلة 01 : *من اجل* n=0 نجد $u_0=e^2-e$ و عليه P(0) محققة

المرحلة 02 : من اجل كل عدد طبيعي n نفرض صحة $P(n)$ ونفرض صحة $P(n+1)$ ، ، *0,75*

3 - اثبات أن (u_n) متتالية هندسية

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{e}u_n$ ومنه (u_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{e}$ و حدها الأول $u_0 = e^2 - e$ **(0,5)**

4 - أ- تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من اجل كل عدد طبيعي n . $u_{n+1} - u_n = -(e-1)^2 e^{-n}$ ،

نلاحظ $u_{n+1} - u_n < 0$ وعليه المتتالية (u_n) متناقصة **(0,5)**

ب- الاستنتاج ان المتتالية متقاربة

بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الاسفل بالعدد 0 فهي متقاربة $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ **(0,5)**

5 - حساب S_n :

$S_n = e^2(1 - \frac{1}{e^{n+1}})$. **(0,5)**

$\lim_{n\to+\infty} S_n = e^2$. **(0,5)**

التمرين الرابع (7نقاط)

الجزء I

1 - 1 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ **(0,5)**

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته y=1 بجوار $-\infty$ **(0,25)**

2 - أ- لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \frac{1}{e^x}ln[e^x(e^{-x}+1)] = \frac{x+\ln(1+e^{-x})}{e^x}$ **(0,25)**

ب- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ **(0,5)**

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته y=0 بجوار $+\infty$ **(0,25)**

3 - أ- دراسة تغيرات الدالة g

النهايات $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ **(0,25)**

من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$ ،

نلاحظ انه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$ $g'(x) < 0$, **(0,5)**

ب- جدول التغيرات : لدينا g(0)=0

x	0 $+\infty$
$g'(x)$	
g	0 ↘

من جدول التغيرات نستنتج انه من اجل كل x من $[0;+\infty[$ g(x)<0 **(0,5)**

4 - أ- حساب $f'(x)$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على IR ولدينا : $f'(x) = \frac{1}{e^x}(-ln(1+e^x) + \frac{e^x}{1+e^x})$ أي $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$ **0,5**

ومنه الدالة f اشارتها من اشارة g اي الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها **0,25**

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	
f	1 ↘

ج- انشاء (C_f) (1)

الحل النموذجي لبكالوريا التجريبي دورة ماي 2022

الشعبة : علوم تجريبية

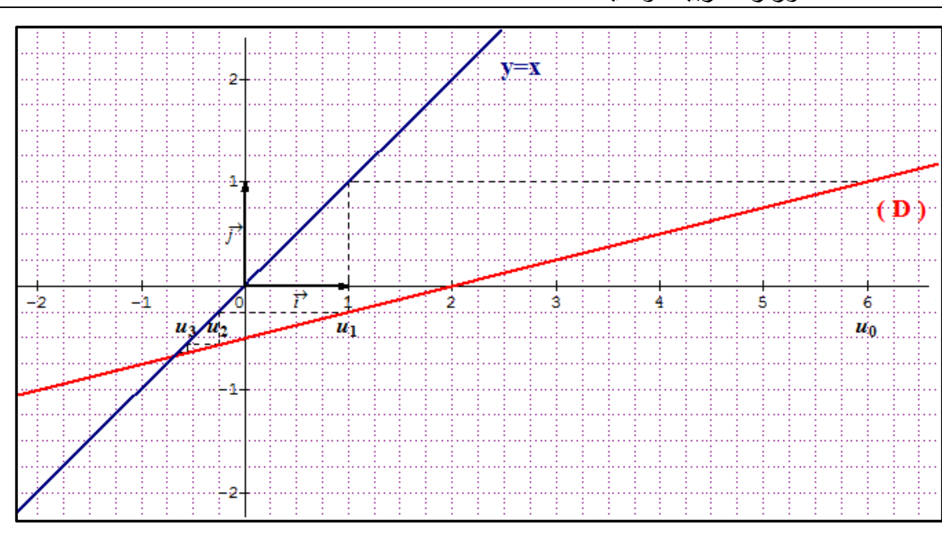
الموضوع الثاني

المستوى: 3 علوم تجريبية.

التصحيح النموذجي المختصر لامتحان البكالوريا التجريبية دورة ماي 2022:	التنقيط:
حل التمرين الأول: (04 نقاط)	
▪ إختيار الإجابة الصحيحة مع التعليل:	
1) الإجابة ب)	0,25
التعليل: المعادلة التفاضلية $y'-2y=1$ تكافئ $y'=2y+1$ و هي من الشكل $y'=ay+b$ حيث $a=2$ و $b=1$	
و عليه فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'-2y=1$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x\mapsto ce^{ax}-\frac{b}{a}$ مع $c\in\mathbb{R}$	0,75
بالتعويض نجد $x\mapsto ce^{2x}-\frac{1}{2}$ مع $c\in\mathbb{R}$	
2) الإجابة أ)	0,25
التعليل:	
لدينا القيمة المتوسطة m للدالة f المعرفة على المجال $[2;3]$ بالعبارة $f(x)=e^{2x+3}-x$ هي: $m=\int_a^b f(x)\,dx$	
بالتعويض نجد: $m=\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3 (e^{2x+3}-x)\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x+3}-\frac{1}{2}x^2\right]_2^3=\frac{1}{2}(e^9-e^7-5)$	0,75
3) الإجابة ب)	0,25
التعليل: لدينا من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>2$ يكون:	
$C_{n-1}^2+C_n^2=\frac{(n-1)!}{2!\times(n-1-2)!}+\frac{n!}{2!\times(n-2)!}=\frac{(n-1)!}{2\times(n-3)!}+\frac{n!}{2\times(n-2)!}$	0,75
يكافئ $C_{n-1}^2+C_n^2=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-1)(2n-2)}{2}=(n-1)^2$	
4) الإجابة ج)	0,25
التعليل: لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\int_0^n 2^x\ln 2\,dx=\int_0^n \ln 2\,e^{x\ln 2}\,dx=\left[e^{x\ln 2}\right]_0^n=2^n-1$	0,75

الصفحة 1

حل التمرين الثاني: (05 نقاط)



1) تمثيل المستقيمان و الحدود: 0,25 0,75

2) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n > -\frac{2}{3}$ .... $p(n)$

أ - مرحلة التحقق: نتحقق من صحة الخاصية p من أجل $n_0 = 0$

لدينا $u_0 = 6$ و بما أن $6 > -\frac{2}{3}$ معناه $u_0 > -\frac{2}{3}$ ما يعني أن الخاصية p صحيحة من أجل $n_0 = 0$. 0,25

ب - مرحلة الوراثة: نفرض أن الخاصية p صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n معناه $u_n > -\frac{2}{3}$ 0,25

و نبرهن صحة الخاصية p من أجل $(n+1)$ أي البرهان أن $u_{n+1} > -\frac{2}{3}$

الصفحة 2

لدينا $u_n > -\frac{2}{3}$ يكافئ $\frac{1}{4}u_n > -\frac{1}{6}$ يكافئ $u_{n+1} > -\frac{4}{6}$ يكافئ $u_{n+1} > -\frac{2}{3}$ 0,25

ما يعني أن الخاصية p صحيحة من أجل $(n+1)$.

- الإستنتاج: نستنتج حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_n > -\frac{2}{3}$ 0,25

3) لنبيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} - u_n = -\frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right)$ 0,25

و لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -\frac{2}{3}$ يكافئ $u_n + \frac{2}{3} > 0$ يكافئ $-\frac{3}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right) < 0$ 0,25

يكافئ $u_{n+1} - u_n < 0$ ما يعني أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

- إستنتاج التقارب: بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد $-\frac{2}{3}$ فإن المتتالية (u_n) متقاربة. 0,5

I - المتتالية العددية (v_n) معرفة على ℕ ب: $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

1) تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} + \alpha = \frac{1}{4}\left(u_n - 2 + 4\alpha\right)$

من جهة أخرى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: **0,5**

$v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$ بالمطابقة مع $v_{n+1}=\frac{1}{4}(u_n-2+4\alpha)$ نجد $v_n=u_n-2+4\alpha$

يكافئ $u_n+\alpha=u_n-2+4\alpha$ يكافئ $\alpha=-2+4\alpha$ يكافئ $-3\alpha=-2$ يكافئ $\alpha=\frac{2}{3}$

- حساب حدها الأول: لدينا $v_0=u_0+\alpha=6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$ معناه $v_0=\frac{20}{3}$ **0,25**

2) أ . الكتابة بدلالة n عبارة الحد العام v_n:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0\times q^n$ بالتعويض نجد $v_n=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$ معناه $v_n=\frac{20}{3\times 4^n}$ **0,5**

ب. استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n: لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+\alpha$

يكافئ $u_n=v_n-\alpha$ يكافئ $u_n=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{3}$ يكافئ $u_n=\frac{2}{3}\left(\frac{10}{4^n}-1\right)$ **0,5**

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{20}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$ لأن $-1<\frac{1}{4}<1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ **0,25**

حل التمرين الثالث (04 نقاط)

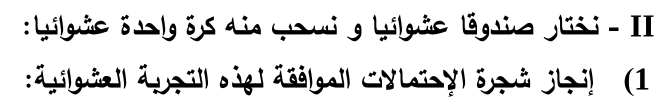
I - حساب احتمال كلّ من الحوادث A، B و C:



◄ لدينا $P(A)=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_7^3}=\frac{5}{35}$ معناه $P(A)=\frac{1}{7}$ **0,5**

◄ لدينا $P(B)=\frac{C_3^1\times C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35}$ معناه $P(B)=\frac{18}{35}$ **0,5**

◄ لدينا $P(C)=\frac{C_4^1\times C_3^2+C_4^2\times C_3^1+C_4^3}{C_7^3}=\frac{34}{35}$ معناه $P(C)=\frac{34}{35}$ **0,5**



II - نختار صندوقا عشوائيا و نسحب منه كرة واحدة عشوائيا:

1) إنجاز شجرة الإحتمالات الموافقة لهذه التجربة العشوائية: **01**

2) لنبيّن أنّ احتمال الحصول على كرة خضراء هو $P(V)=\dfrac{5}{14}$:

لدينا $P(V)=P(U\cap V)+P(U'\cap V)$ يكافئ $P(V)=P(U)\times P_U(V)+P(U')\times P_{U'}(V)$ — **0,5**

بالتعويض نجد $P(V)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{7}$ ما يعني أن $P(V)=\dfrac{5}{14}$ — **0,25**

3) حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق U علما أنها خضراء اللون:

لدينا $P_V(U)=\dfrac{P(U\cap V)}{P(U)}=\dfrac{P(U)\times P_U(V)}{P(U)}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{7}}{\dfrac{5}{14}}==\dfrac{\dfrac{3}{14}}{\dfrac{5}{14}}=\dfrac{3}{14}\times\dfrac{14}{5}=\dfrac{3}{5}$ معناه أن $P_V(U)=\dfrac{3}{5}$ — **0,75**

حل التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - الدالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة:

x	0 1 $+\infty$
$g'(x)$	+ 0 −

$$g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$$

1) دراسة تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

النهايات: لدينا $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2-2x^2\ln x\right)=1$ — **0,25**

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+x^2-2x^2\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x^2}+1-2\ln x\right)\right]=-\infty$$ — **0,25** **0,25**

المشتقة: الدالة العددية g معرّفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ تكون: — **0,25**

$g'(x)=2x-2\left(2x\times\ln x+\dfrac{1}{x}\times x^2\right)=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x$ معناه $g'(x)=-4x\ln x$

إشارة المشتقة: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $4x>0$

و عليه فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة العبارة $-\ln x$ معناه أن: — **0,25**

إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ — **0,25**

جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$

2) لنبيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $1{,}8<\alpha<2$: — **0,25**

لدينا الدالة g معرفة و مستمرة و رتيبة (متناقصة تماما) على المجال $[1;+\infty[$ — **0,25**

إذا بالضرورة فإن الدالة g معرفة و مستمرة و رتيبة (متناقصة تماما) على المجال $[1{,}8\,;\,2]$.

و لدينا $g(1{,}8)\approx 0{,}43$ و $g(2)\approx -0{,}55$ و بما أن $g(1{,}8)\times g(2)<0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}8<\alpha<2$ مع $g(\alpha)=0$. — **0,25**

▪ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0 $\quad\alpha$ $\quad+\infty$
$g(x)$	$+$ $\quad 0$ $\quad -$

0,25

II -

1) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

0,25



لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left(\dfrac{\ln x}{1+x^2}\right) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(1+x^2)=1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(\ln x) = -\infty$



و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{\ln x}{1+x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x^2 \times \dfrac{\ln x}{x^2}}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{\dfrac{\ln x}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+1}\right) = 0$

0,25
0,25

– التفسير الهندسي للنهايتين:

- لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ ما يعني أن المنحنى (C_f) مستقيم مقارب معادلته $x=0$ هو حامل محور التراتيب.
- لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ما يعني أن المنحنى (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y=0$ هو حامل محور الفواصل بجوار $+\infty$.

2) أ. لنبيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$:

0,5

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

لدينا الدالة العددية f معرّفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ تكون:

0,25
0,25

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times(1+x^2) - 2x \times \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x}+x-2x\ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{x\left(\frac{1}{x}+x-2x\ln x\right)}{x(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

0,5

ب. استنتاج إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $x(1+x^2)^2 > 0$ و عليه فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ما يعني أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

▪ تشكيل جدول تغيّرات الدالة f :

0,25

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

3) لنبيّن أنّ: $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$: لدينا $g(\alpha)=0$ يكافئ $1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha = 0$ يكافئ $\ln\alpha = \dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

و من جهة أخرى $f(\alpha) = \dfrac{\ln\alpha}{1+\alpha^2}$ بالتعويض نجد $f(\alpha) = \dfrac{\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2} = \dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}\times\dfrac{1}{1+\alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha^2}$

0,25

▪ استنتاج حصر للعدد الحقيقي $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}:

لدينا $1{,}8 < \alpha < 2$ يكافئ $3{,}24 < \alpha^2 < 4$ يكافئ $6{,}48 < 2\alpha^2 < 8$ يكافئ $\dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{2\alpha^2} < \dfrac{1}{6{,}48}$

0,25

و عليه فإن حصر للعدد الحقيقي $f(\alpha)$ الذي سعته 10^{-2} هو:

$0{,}13 < f(\alpha) < 0{,}15$

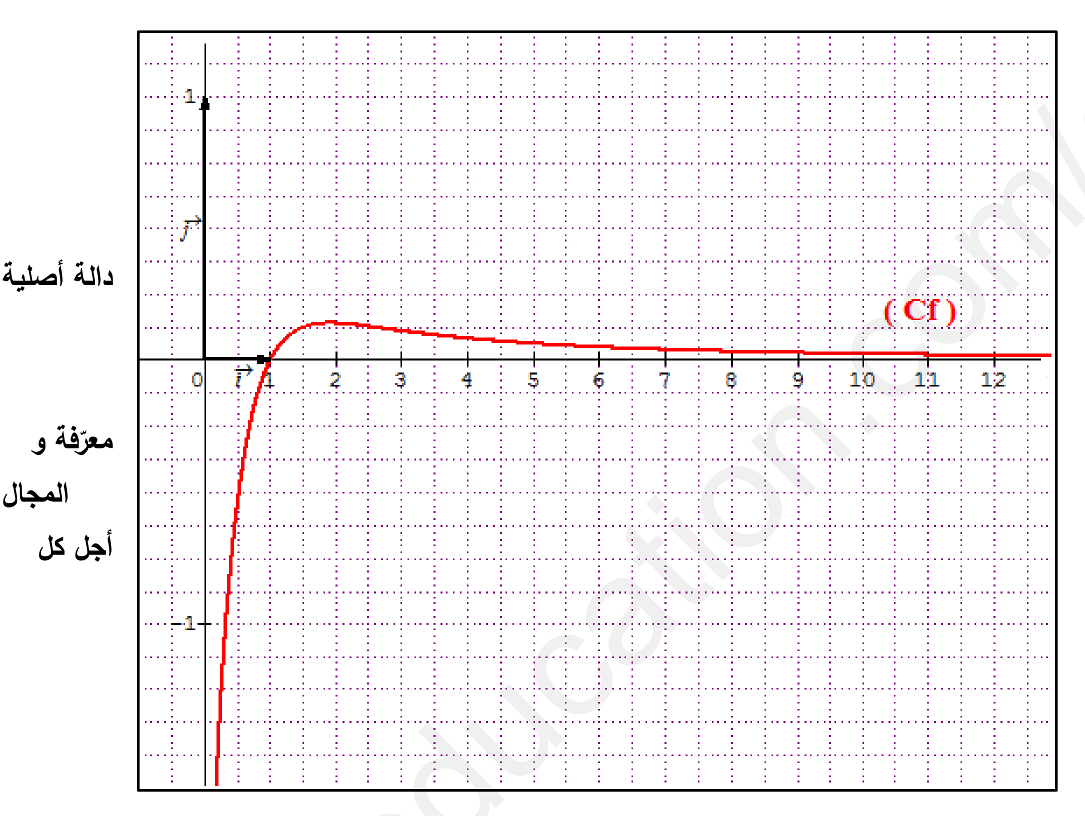
4) تعيّن إحداثيّي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل:

لدينا $f(x)=0$ تكافئ $\frac{\ln x}{1+x^2}=0$ تكافئ $\ln x=0$ تكافئ $x=1$.

– ما يعني أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $(1;0)$.

المنحنى (C_f) 0,5

- إنشاء المنحنى (C_f):



III -

1) لنبيّن أنّ الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

0,5

لدينا الدالة العددية G معرّفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ تكون:

0,25

0,25

$$G'(x)=\frac{5}{9}\times 3x^2+1-\frac{2}{3}\left(3x^2\ln x+x^3\times\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{3}x^2+1-2x^2\ln x-\frac{2}{3}x^2=1+x^2-2x^2\ln x$$

و عليه $G'(x)=g(x)$ ما يعني أن الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) حساب بدلالة α العدد A_α : لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;\alpha]$: $g(x)\geq 0$ و عليه فإن:

$$A_\alpha=\int_1^\alpha g(x)\,dx=\left[G(x)\right]_1^\alpha=G(\alpha)-G(1)$$ و لدينا $G(\alpha)=\frac{5}{9}\alpha^3+\alpha-\frac{2}{3}\alpha^3\ln\alpha$ و $G(1)=\frac{14}{9}$

و عليه $A_\alpha=\frac{5}{9}\alpha^3+\alpha-\frac{2}{3}\alpha^3\ln\alpha-\frac{14}{9}\ \mu a$

إنتهى تصحيح الموضوع.



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة: **2021**

الشعبة: تقني رياضي — ثانوية مرسى الحجاج (وهران)

تصحيح اختبار مادة: الرياضيات — إعداد: الأستاذ قوعيش

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $(E)...2011x-1432y=31$

أ) بين أن العدد 2011 أولي .

لدينا $\sqrt{2011}\approx 44,8$ والعدد 2011 لا يقبل القسمة على أي عدد أولي من بين الأعداد الأولية الأصغر من 44

ب) باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

لدينا :

$$579=2011-1\times1432$$
$$274=1432-2\times579$$
$$31=579-2\times274$$

ومنه :
$$\begin{cases}31=579-2\times(1432-2\times579)\\=-2\times1432+5\times579\\=-2\times1432+5\times(2011-1\times1432)\\=5\times2011-7\times1432\end{cases}$$

بالمطابقة نجد $(x_0;y_0)=(5;7)$

لدينا : $\begin{cases}2011x-1432y=31\\2011x_0-1432y_0=31\end{cases}$ بالطرح نجد : $2011(x-x_0)=1432(y-y_0)$ أي :

$2011(x-5)=1432(y-7)$.

لدينا $1432/2011(x-5)$ و 1432 أولي مع 2011 إذن حسب مبرهنة غوص $1432/x-5$

ومنه $x=1432k+5$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y=2011k+7$

ومنه : $(x;y)=(1432k+5;2011k+7)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

2) **أ)** عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 .

$2^0\equiv1[7]$ ، $2^1\equiv2[7]$ ، $2^2\equiv4[7]$ ، $2^3\equiv1[7]$ ومنه البواقي دورية ودورها 3 إذن من أجل كل عدد طبيعي k لدينا : $2^{3k}\equiv1[7]$ ، $2^{3k+1}\equiv2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv4[7]$.

لدينا $2011\equiv2[7]$ ومنه $2011^{1432^{2012}}\equiv2^{1432^{2012}}[7]$

من جهة أخرى $1432 \equiv 1[3]$ ومنه $1432^{2012} \equiv 1^{2012}[3]$ أي $1432^{2012} \equiv 1^{2012}[3]$ ومنه $1432^{2012} = 3k' + 1$ حيث $k' \in \mathbb{N}$ إذن $2^{1432^{2012}} \equiv 2[7]$ ومنه $2011^{1432^{2012}} \equiv 2\ [7]$ إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 هو 2 .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$.

لدينا $2010 \equiv 1[7] \Leftrightarrow 2010^n \equiv 1^n[7] \Leftrightarrow 2010^n \equiv 1[7]$

$2011 \equiv 2[7] \Leftrightarrow 2011^n \equiv 2^n[7]$

$1432 \equiv 4[7] \Leftrightarrow 1432^n \equiv 2^{2n}[7]$

ومنه $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 1 + 2^n + 2^{2n}[7]$ إذن :

$2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7] \Leftrightarrow 1 + 2^n + 2^{2n} \equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow 2^n + 2^{2n} \equiv -1[7]$

$\Leftrightarrow 2^n + 2^{2n} \equiv 6[7]$

ليكن $k \in \mathbb{N}$

من أجل $n = 3k$: $2^n + 2^{2n} = 2^{3k} + 2^{3(2k)} \equiv 2[7]$ (مرفوض)

من أجل $n = 3k+1$: $2^n + 2^{2n} = 2^{3k+1} + 2^{2(3k+1)} = 2^{3k+1} + 2^{3(2k)+2} \equiv 6[7]$ (مقبول)

من أجل $n = 3k+2$: $2^n + 2^{2n} = 2^{3k+2} + 2^{2(3k+2)} = 2^{3k+2} + 2^{3(2k+1)+1} \equiv 6[7]$ (مقبول)

إذن قيم n هي : $n = 3k+1$ أو $n = 3k+2$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 9 حيث α ، β و γ تشكل حدودا متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية متزايدة تماما و الثنائية $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (E) .

أ) عين α ، β و γ .

$N = \overline{2\gamma\alpha\beta}^9 = \beta + \alpha \times 9 + \gamma \times 9^2 + 2 \times 9^3 = \beta + 9\alpha + 81\gamma + 54$ مع الشروط : $\begin{cases} 0 \le \alpha < 9 \\ 0 \le \beta < 9 \\ 0 \le \gamma < 9 \end{cases}$

الثنائية $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (E) معناه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث : $\beta = 1432k + 5$ و $\gamma = 2011k + 7$

$0 \le \beta < 9 \Leftrightarrow 0 \le 1432k + 5 < 9 \Leftrightarrow -\frac{5}{1432} \le k < \frac{4}{1432} \Leftrightarrow -0{,}0035 \le k < 0{,}0028$

وبما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 0$ بالتعويض نجد $\beta = 5$ و $\gamma = 7$.

α ، β و γ تشكل حدودا متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية متزايدة تماما معناه $\alpha + \gamma = 2\beta$ ومنه $\alpha = 2\beta - \gamma = 3$.

ب) أكتب N في النظام العشري .

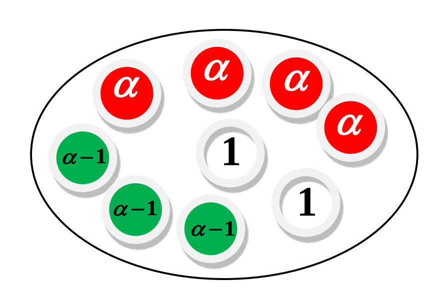
$N = \beta + 9\alpha + 81\gamma + 54 = 2057$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

يحوي كيس على أربع كريات حمراء تحمل الرقم α و ثلاث كريات خضراء تحمل الرقم $\alpha - 1$ و كريتين بيضاوين تحملان الرقم 1 ، حيث α عدد طبيعي غير معدوم . الكريات متماثلة ولا نميز بينها عند اللمس .

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد .

نعتبر الحوادث التالية : A " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر" ، B "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس العدد" و C " الحصول على كريتين بالضبط تحملان الرقم $\alpha - 1$ " .



1) **أ)** أحسب إحتمال كل من الحوادث A ، B و C.

A " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر"

نميز حالتين :

سحب 3 كريات من بينها واحدة بيضاء

سحب 3 كريات ولا توجد من بينها أي كرية بيضاء .

ومنه $P(A)=\frac{C_2^1\times C_7^2+C_7^3}{C_9^3}=\frac{11}{12}$

B "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس العدد"

نميز حالتين :

سحب 3 كريات لها نفس الرقم α .

سحب 3 كريات لها نفس الرقم $\alpha-1$.

ومنه $P(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$

C " الحصول على كريتين بالضبط تحملان الرقم $\alpha-1$"

معناه سحب 3 كريات من بينها كريتين تحملان الرقم $\alpha-1$ أما الكرية الثالثة تحمل إما الرقم 1 أو الرقم α

ومنه $P(C)=\frac{C_3^2\times C_6^1}{C_9^3}=\frac{3}{14}$

ب) ما هو احتمال الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني ؟

معناه سحب 3 كريات من 3 ألوان مختلفة مثنى مثنى ومنه :

$$P(D)=\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_4^1}{C_9^3}=\frac{2}{7}$$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام الظاهرة على الكريات الحمراء المسحوبة والذي يأخذ القيمة 0 إذا لم يتم سحب أي كرية حمراء .

أ) برر أن القيم الممكنة لـ X هي $\{0,\alpha,2\alpha,3\alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله .

إذا لم يتم سحب أي كرية حمراء فإن $X=0$

إذا سحبنا كرية حمراء واحدة فإن $X=\alpha$

إذا سحبنا كريتين حمراوين فإن $X=\alpha+\alpha=2\alpha$

إذا كانت كل الكريات الثلاث حمراء فإن $X=\alpha+\alpha+\alpha=3\alpha$

ومنه $X\in\{0,\alpha,2\alpha,3\alpha\}$

$$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{10}{84}$$

$$P(X=\alpha)=\frac{C_4^1\times C_5^2}{C_9^3}=\frac{40}{84}$$

$$P(X=2\alpha)=\frac{C_4^2\times C_5^1}{C_9^3}=\frac{30}{84}$$

$$P(X=3\alpha)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{4}{84}$$

$X=X_i$	0	α	2α	3α
$P(X=X_i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

ب) أحسب بدلالة α الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X ، ثم عين قيمة α من أجل $|E(X)-1|\le 2$.

$$E(X)=0\times\frac{10}{84}+\alpha\times\frac{40}{84}+2\alpha\times\frac{30}{84}+3\alpha\times\frac{4}{84}=\frac{4}{3}\alpha$$

$$|E(X)-1|\le 2\Leftrightarrow -2\le E(X)-1\le 2\Leftrightarrow -1\le E(X)\le 3\Leftrightarrow -1\le\frac{4}{3}\alpha\le 3\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le\alpha\le\frac{9}{4}\Leftrightarrow -0,75\le\alpha\le 1,25$$

بما أن α عدد طبيعي غير معدوم فإن $\alpha\in\{1;2\}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=-2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}=\frac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n<0$.

من أجل $n=1$ لدينا $u_1=-2<0$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

نفرض أن $u_n<0$ ونبرهن أن $u_{n+1}<0$.

لدينا $u_n<0\Leftrightarrow 3(n+1)u_n<0$ لأنه $\forall n\in\mathbb{N}^*, 3(n+1)>0$

كذلك $\forall n\in\mathbb{N}^*, 8n+12>0$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^*, -(8n+12)<0$

بالجمع نجد $3(n+1)u_n-(8n+12)<0$ وبما أن $n>0$ فإن $\frac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}<0$ ومنه $u_{n+1}<0$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$. ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n<0$

ب) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}-u_n=\frac{3(n+1)u_n-(8n+12)-nu_n}{n}=\frac{(2n+3)(u_n-4)}{n}$

بما أنه $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n<0$ فإن $u_n<4$ ومنه $u_n-4<0$ وبما أن $n>0$ و $2n+3>0$ فإن

$\frac{(2n+3)(u_n-4)}{n}<0$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1}-u_n<0$ إذن (u_n) متناقصة تماما .

2) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_n=\frac{4-u_n}{n}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول ، ثم عبر عن v_n بدلالة n .

$$v_{n+1}=\frac{4-u_{n+1}}{n}=\frac{4-\frac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}}{n}=\frac{4n-3(n+1)u_n+8n+12}{n(n+1)}=\frac{-3(n+1)u_n+12(n+1)}{n(n+1)}$$

ومنه $v_{n+1}=\frac{-3u_n+12}{n}=3\left(\frac{4-u_n}{n}\right)=3v_n$ إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 .

حدها الأول : $v_1=6$.



ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n = 4-2n\times 3^n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 6\times 3^{n-1} = 2\times 3^n$ ومن جهة أخرى لدينا :

$$v_n = \frac{4-u_n}{n} \Leftrightarrow 4-u_n = nv_n \Leftrightarrow u_n = 4-nv_n = 4-2n\times 3^n$$

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \end{cases}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4-2n\times 3^n = -\infty$ ، لاحظ أن (u_n) متباعدة .

ج) أحسب بدلالة n الجداء : $P_n = (4-u_1)(4-u_2)...(4-u_n)$.

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*, nv_n = 4-u_n$ ومنه :

$$P_n = (4-u_1)(4-u_2)...(4-u_n) = (1\times v_1)(2\times v_2)...(n\times v_n) = (1\times 2\times ...\times n)(v_1\times v_2\times ...\times v_n)$$

نعلم أن : $1\times 2\times ...\times n = n!$

$$v_1\times v_2\times ...\times v_n = 2.3^1\times 2.3^2\times ...\times 2.3^n = 2^n.3^{1+2+...+n} = 2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ومنه $P_n = n!2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}}$

3) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $w_n = \ln\left(\frac{n}{4-u_n}\right)$.

- عبر عن w_n بدلالة n ثم أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = w_1 + w_2 + ... + w_n$.

$$w_n = \ln\left(\frac{n}{4-u_n}\right) = \ln\frac{1}{v_n} = -\ln(2.3^n)$$

$$S_n = w_1+w_2+...+w_n = -\ln(2.3^1)-\ln(2.3^2)-...-\ln(2.3^n) = -\ln(2.3^1\times 2.3^2\times ...\times 2.3^n) = -\ln\left(2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x+2)e^{x-2} - 2$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^2}xe^x + \frac{2}{e^2}e^x - 2 = -2$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2} = +\infty \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

$g'(x) = (x+3)e^{x-2}$ وإشارة $g'(x)$ من إشارة $x+3$ لأنه : $\forall x\in\mathbb{R}, e^{x-2} > 0$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-3]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-3;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-2 ↘	$-\frac{1}{e^5}-2$	↗ $+\infty$

3) أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن $1,45<\alpha<1,46$.

الدالة g لا تنعدم على المجال $]-\infty;-3[$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-2<0$ و $g(-3)\approx-2,006<0$

بينما الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-3;+\infty[$ ولدينا $g(-3)<0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-3;+\infty[$.

لدينا $g(1,45)\times g(1,46)\approx-0,0095\times0,0163<0$ ومنه $\alpha\in]1,45;1,46[$

ب) استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-x^2e^{x-2}$

نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

$$f(x)=0\Leftrightarrow x^2\left(1-e^{x-2}\right)=0\Leftrightarrow x^2=0 \text{ ou } 1-e^{x-2}=0$$

$$x^2=0\Leftrightarrow x=0$$

$$1-e^{x-2}=0\Leftrightarrow e^{x-2}=1\Leftrightarrow x=2$$

ومنه حلول المعادلة هي $\{0;2\}$ ونستنتج أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما 0 و 2 .

2) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2-\frac{1}{e^2}x^2e^x=+\infty \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-e^{x-2}\right)=-\infty \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2}=+\infty\end{cases}$$

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-x.g(x)$. (f' هي الدالة المشتقة الأولى للدالة f)

$$f'(x)=2x\left(1-e^{x-2}\right)+x^2\left(-e^{x-2}\right)=x\left(2-2e^{x-2}-xe^{x-2}\right)=-x\left(xe^{x-2}+2e^{x-2}-2\right)=-x\left[(x+2)e^{x-2}-2\right]=-xg(x)$$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

إشارة $f'(x)$ من إشارة الجداء $-x.g(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$-x$		+	0	-		-	
$g(x)$		-		-	0	+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;\alpha]$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

ج) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$ ، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$ حيث α هو العدد الحقيقي المعرف في الجزء I) .

$$g(\alpha)=0 \Leftrightarrow (\alpha+2)e^{\alpha-2}-2=0 \Leftrightarrow e^{\alpha-2}=\frac{2}{\alpha+2}$$

$$f(\alpha)=\alpha^2-\alpha^2e^{\alpha-2}=\alpha^2-\alpha^2.\frac{2}{\alpha+2}=\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$$

$$1,45<\alpha<1,46 \Leftrightarrow 3,45<\alpha+2<3,46 \Leftrightarrow \frac{1}{3,46}<\frac{1}{\alpha+2}<\frac{1}{3,45}$$

$$1,45<\alpha<1,46 \Leftrightarrow 3,0486<\alpha^3<3,1121$$

ومنه $\dfrac{3,1121}{3,45}<\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}<\dfrac{3,0486}{3,46}$ أي $0,8811<f(\alpha)<0,9021$

4) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ على $\mathbb{R}$:

أ) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x^2\right]=0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2e^{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{e^2}x^2e^x=0$ ، ومنه (Γ) منحنى مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ب) أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

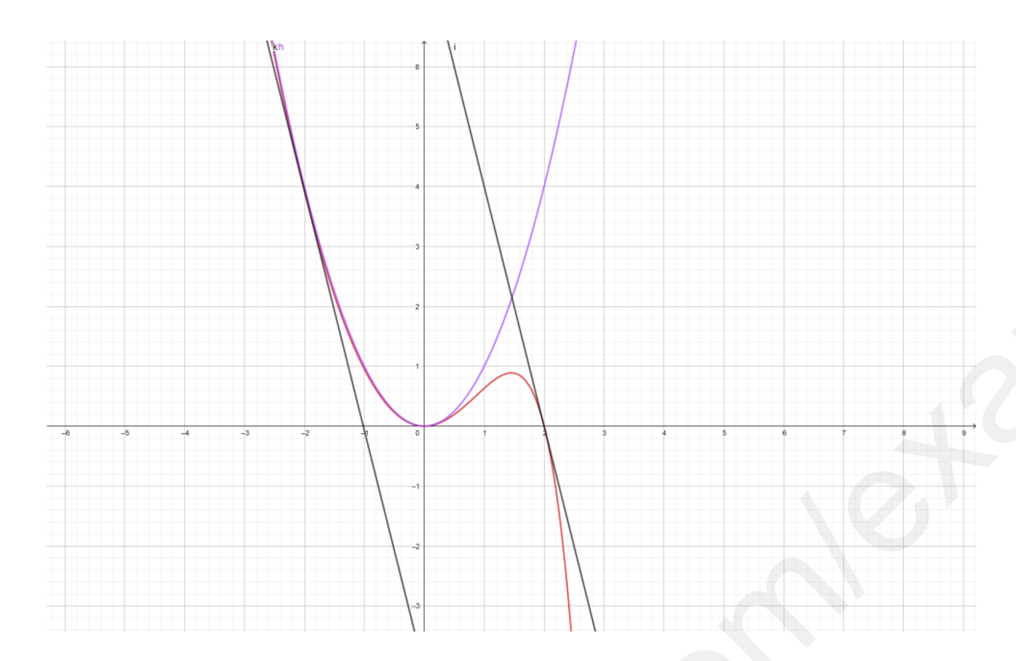
يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x)-x^2$ أي $-x^2e^{x-2}$ وبما أن $\forall x\in\mathbb{R}, e^{x-2}>0$ فإن إشارة $-x^2e^{x-2}$ من إشارة $-x^2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x^2$		-	0	-	
الوضعية النسبية		(C_f) تحت (Γ)	تقاطع	(C_f) تحت (Γ)	

5) عين معادلة لكل من المماسين (T) و (T') لـ (C_f) عند النقطتين ذات الفاصلتين 2 و -2 على الترتيب .

$(T): y=-4x+8$ ، $(T'): y=-4x-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)$

6) أنشيء (T) ، (T') ، (Γ) و (C_f) .



7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $f(x)=-4x+\ln(m)$.

يكفي مناقشة عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $(d_m): y=-4x+\ln(m)$

الذي يوازي كلا من (T) و (T') ومنه :

من أجل $\ln(m)<-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)$ أي $0<m<e^{-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

من أجل $\ln(m)=-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)$ أي $m=e^{-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا .

من أجل $-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)<\ln(m)<8$ أي $e^{-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)}<m<e^8$ المعادلة تقبل 3 حلول بسيطة .

من أجل $\ln(m)=8$ أي $m=e^8$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا .

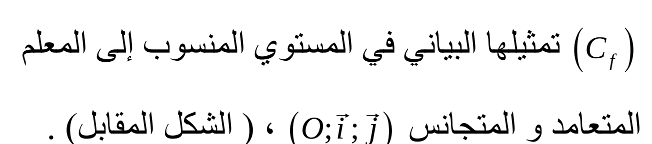
من أجل $\ln(m)>8$ أي $m>e^8$ المعادلة تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

انتهى تصحيح الموضوع الأول

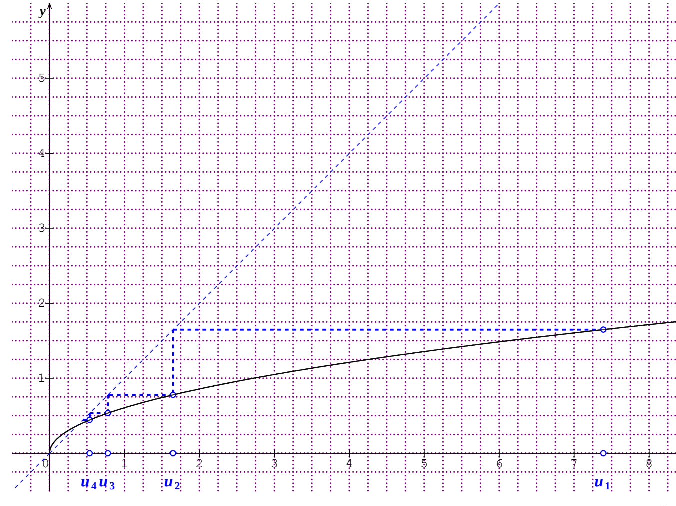
الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x}$.



(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، (الشكل المقابل) .



1) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

من البيان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

لدينا كذلك : $f'(x)=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x}}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)>0$ إذن f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1=e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل(دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

أنظر الشكل المقابل .

ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

لدينا من البيان $u_1>u_2>u_3>u_4$ ومنه (u_n) متناقصة تماما .

النقط M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 من المنحنى (C_f) ذات الفواصل u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 على الترتيب تتقارب نحو نقطة ثابتة A هي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x$ ومنه (u_n) متقاربة نحو فاصلة النقطة A .

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>\dfrac{1}{e}$.

من أجل $n=1$ لدينا $u_1=e^2>\dfrac{1}{e}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$

نفرض أن $u_n>\dfrac{1}{e}$ و نبرهن أن $u_{n+1}>\dfrac{1}{e}$

لاحظ أن : $u_{n+1}=e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}$

$u_n>\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow\sqrt{u_n}>\sqrt{\dfrac{1}{e}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}>\dfrac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{\dfrac{1}{e}}\Leftrightarrow u_{n+1}>\dfrac{1}{e}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>\dfrac{1}{e}$ ونستنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل .

4) **أ)** أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}-u_n=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}\right)^2-{u_n}^2}{\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}+u_n}=\frac{u_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}+u_n}$$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > \frac{1}{e}$ فإن $u_n > 0$ ومنه $\sqrt{u_n} > 0$ إذن $\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n} + u_n > 0$

كذلك من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\frac{1}{e} - u_n < 0$ ومنه $u_n\left(\frac{1}{e} - u_n\right) < 0$ إذن

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه (u_n) متناقصة تماما .

ب) برر تقارب المتتالية (u_n) ثم أوجد نهايتها .

بما أن (u_n) محدودة من الأسفل ومتناقصة تماما فهي متقاربة ، لإيجاد نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{e}x = x^2 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{e} - x\right) = 0$ ومنه $x = 0$ أو $x = \frac{1}{e}$ وبما أنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

فإن $x = \frac{1}{e}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{e}$

5) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حدها الأول .

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\ln e^{-\frac{1}{2}} + \ln\sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln\sqrt{u_n}$$

ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln\sqrt{u_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

حدها الأول : $v_1 = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_1} = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{e^2} = \frac{3}{2}$

ب) أكتب عبارتي v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$v_n = v_1 . q^{n-1} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v_n = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n} \Leftrightarrow \ln\sqrt{u_n} = v_n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \left(e^{v_n - \frac{1}{2}}\right)^2 = e^{2v_n - 1} = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{1}{e} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \\ -1 < \frac{1}{2} < 1 \end{cases}$$

6) أحسب بدلالة n المجموع التالي : $S_n = \frac{1}{1+\ln u_1} + \frac{1}{1+\ln u_2} + \ldots + \frac{1}{1+\ln u_n}$.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \ln u_n = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1+\ln u_n} = \frac{2^n}{6}$

إذن : $S_n = \frac{1}{1+\ln u_1} + \frac{1}{1+\ln u_2} + \ldots + \frac{1}{1+\ln u_n} = \frac{2^1}{6} + \frac{2^2}{6} + \ldots + \frac{2^n}{6} = \frac{1}{6}\left(2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n\right) = \frac{1}{6}.2\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right)$

ومنه $S_n = \frac{1}{3}\left(2^n - 1\right)$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) أ) أنشر العبارة $(n+2)(3n^2 - 6n + 16)$ مع $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+2)(3n^2 - 6n + 16) = 3n^3 + 4n + 32$$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3+4n+32$ قابلا للقسمة على $n+2$.

بما أن $3n^3+4n+32=(n+2)k$ حيث $k=3n^2-6n+16$ و $k\in\mathbb{Z}$ فإن $n+2/3n^3+4n+32$

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2-6n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .

لدينا $\Delta=-156<0$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N},3n^2-6n+16>0$ وبما أن $3n^2-6n+16\in\mathbb{Z}$ فإن $3n^2-6n+16$ عدد طبيعي غير معدوم .

3) أ) بين أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة α ، β و γ ، تكون المساواة التالية صحيحة :

$PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta\gamma-\alpha;\beta)$.

نضع $PGCD(\alpha;\beta)=d$ و $PGCD(\beta\gamma-\alpha;\beta)=d'$

لدينا $\begin{cases}d/\alpha\\d/\beta\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}d/\alpha\\d/\beta\gamma\end{cases}$ بالطرح نجد $d/\beta\gamma-\alpha$

$\begin{cases}d/\beta\\d/\beta\gamma-\alpha\end{cases}$ ومنه d قاسم مشترك للعددين β و $\beta\gamma-\alpha$ ومنه فهو يقسم القاسم المشترك الأكبر لهما أي d/d'

من جهة أخرى لدينا : $\begin{cases}d'/\beta\\d'/\beta\gamma-\alpha\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}d'/\beta\gamma\\d'/\beta\gamma-\alpha\end{cases}$ بالطرح نجد : d'/α

$\begin{cases}d'/\beta\\d'/\alpha\end{cases}$ ومنه d' قاسم مشترك للعددين β و α ومنه فهو يقسم القاسم المشترك الأكبر لهما أي d'/d

d/d' و d'/d إذن $d=d'$ أي $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta\gamma-\alpha;\beta)$

ب) استنتج أنه من أجل عدد طبيعي n ، $PGCD(3n^3+4n;n+2)=PGCD(32;n+2)$.

بوضع : $\alpha=3n^3+4n$ ، $\beta=n+2$ و $\gamma=3n^2-6n+16\in\mathbb{N}^*$ نجد :

$\beta\gamma-\alpha=(n+2)(3n^2-6n+16)-3n^3-4n=32$

ومنه حسب ما سبق : $PGCD(3n^3+4n;n+2)=PGCD(32;n+2)$

4) أ) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 32 .

$\{1;2;4;8;16;32\}$

ب) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $A=\dfrac{3n^3+4n}{n+2}$ طبيعيا .

لدينا من أجل عدد طبيعي n ، $3n^3+4n$ و $n+2$ عددان طبيعيان مع $n+2\neq 0$

حتى يكون العدد $A=\dfrac{3n^3+4n}{n+2}$ يكفي : $n+2/3n^3+4n$ ومنه $PGCD(3n^3+4n;n+2)=n+2$

معناه كذلك : $PGCD(32;n+2)=n+2$ ومنه $n+2/32$ أي $n+2\in D_{32}^{+}$

$n+2$	1	2	4	8	16	32
n	-1 مرفوض	0	2	6	14	30

ومنه $n\in\{0;2;6;14;30\}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحوي كيس على خمس كرات حمراء و ثلاث كرات بيضاء ، كل الكرات متماثلة ولا نميز بينها باللمس .

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كرات في آن واحد .

1) أحسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

A " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون" ، B " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

$$P(A)=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_8^3}=\frac{11}{56}$$

$$P(B)=\frac{C_3^1\times C_5^2+C_3^2\times C_5^1+C_3^3}{C_8^3}=\frac{23}{28}$$

2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء ونضع مكانها n كرة سوداء حيث $n\geq 2$ ، ثم يسحب لاعب كرتين على التوالي دون إرجاع الكرة المسحوبة الأولى .

إذا سحب اللاعب كرة سوداء يتحصل على 5 نقاط وإذا سحب كرة حمراء يخسر 10 نقاط . وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع النقاط المحصل عليها .

أ) عرف قانون الاحتمال لـ X ، ثم بين أن أمله الرياضياتي هو $E(X)=\dfrac{10n^2-60n-400}{(n+4)(n+5)}$.

تعيين القيم الممكنة لـ X :

كرتين حمراوين فإنه يخسر 20 نقطة وإذا سحب كرة حمراء وكرة سوداء فإنه يخسر 5 نقاط أما إذا سحب كرتين سوداوين فإنه يربح 10 نقاط ، ومنه $X\in\{-20;-5;10\}$.

عدد الكرات الإجمالي في الكيس هو $n+5$ ومنه عدد الحالات الممكنة للسحب هو A_{n+5}^2

$$P(X=-20)=\frac{A_5^2}{A_{n+5}^2}=\frac{\dfrac{5!}{2!}}{\dfrac{(n+5)!}{(n+3)!}}=\frac{20(n+3)!}{(n+5)!}=\frac{20(n+3)!}{(n+5)(n+4)(n+3)!}=\frac{20}{(n+5)(n+4)}$$

$$P(X=-5)=\frac{\Gamma_2^{1,1}\times A_5^1\times A_n^1}{A_{n+5}^2}=\frac{2\times\dfrac{5!}{4!}\times\dfrac{n!}{(n-1)!}}{\dfrac{(n+5)!}{(n+3)!}}=\frac{10n}{(n+5)(n+4)}$$

$$P(X=10)=\frac{A_n^2}{A_{n+5}^2}=\frac{\dfrac{n!}{(n-2)!}}{\dfrac{(n+5)!}{(n+4)!}}=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

$X = X_i$	-20	-5	10
$P(X = X_i)$	$\frac{20}{(n+5)(n+4)}$	$\frac{10n}{(n+5)(n+4)}$	$\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

ومنه :
$$\begin{cases} E(X) = (-20)\dfrac{20}{(n+5)(n+4)} + (-5)\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)} + 10 \times \dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)} \\ = \dfrac{-400 - 50n + 10n(n-1)}{(n+5)(n+4)} = \dfrac{10n^2 - 60n - 400}{(n+4)(n+5)} \end{cases}$$

ب) ما هو أصغر عدد ممكن للكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة .

حتى تكون اللعبة مربحة يكفي : $E(X) > 0$

$E(X) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{10n^2 - 60n - 400}{(n+4)(n+5)} > 0 \Rightarrow 10n^2 - 60n - 400 > 0$ لأن $(n+4)(n+5) > 0$

يكفي حل المتراجحة $10x^2 - 60x - 400 > 0$ نجد $x \in]-\infty;-4[\cup]10;+\infty[$

وبما أن $n \in \mathbb{N}$ فإن $n > 10$ ومنه أصغر عدد ممكن للكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة هو 11 .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^2 + 2 = 2 \end{cases} \quad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{cases} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(x + \dfrac{2}{x} - 2\dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

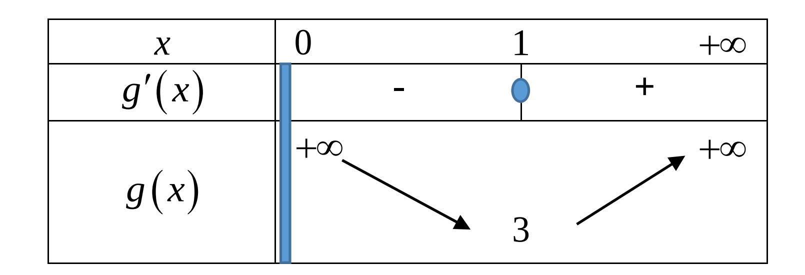
2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

$g'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x}$ وإشارتها من إشارة $x^2 - 1$ لأن $x \in]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;1[$ ومتزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول التغيرات :



x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

3) حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى هي 3 ومنه : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) \geq 3$ ومنه $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$

x	0 $+\infty$
$g(x)$	+

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = -x + e - \frac{2\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ، ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} -x + e - \frac{2}{x}.\ln x = +\infty \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{2}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مطابقا لحامل محور التراتيب بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

$$f'(x) = -1 - \left(\frac{\frac{2}{x} \times x - 2\ln x}{x^2} \right) = \frac{-x^2 - 2 + 2\ln x}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

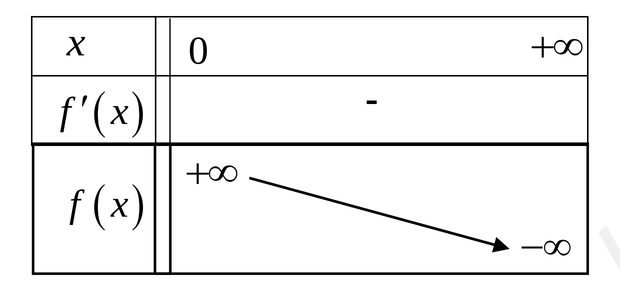
3) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ لأنه $\forall x \in]0;+\infty[, x^2 > 0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جدول التغيرات :



x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

4) **أ)** بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+e$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+e)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{2\ln x}{x}=0$ ومنه (Δ) الذي معادلته $y=-x+e$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x)-(-x+e)$ أي $-\dfrac{2\ln x}{x}$

إشارة $-\dfrac{2\ln x}{x}$ من إشارة $-2\ln x$ لأن $x>0$

x	0		1		$+\infty$
$-2\ln x$		+	0	-	
الوضعية النسبية		(C_f) فوق (Δ)	تقاطع	(C_f) تحت (Δ)	

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) ، ثم جد معادلة له .

يكفي حل المعادلة $f'(x)=-1$

$\dfrac{-x^2-2+2\ln x}{x^2}=-1 \Leftrightarrow f'(x)=-1$ نجد $-2+2\ln x=0$ ومنه $x=e$

ومنه (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) حيث : $(T): y=f'(e)(x-e)+f(e)$

ومنه $(T): y=-x+e-\frac{2}{e}$

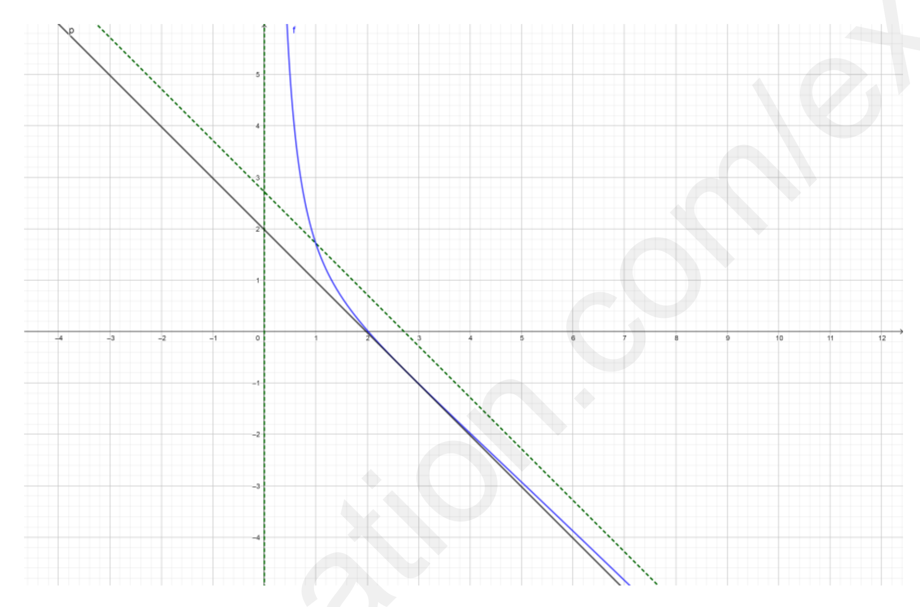
6) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $2<\alpha<2,1$.

يكفي أن نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2<\alpha<2,1$

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالأخص على المجال $]2;2,1[$ ولدينا :

$f(2)\times f(2,1)\approx 0,025\times(-0,08)<0$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2<\alpha<2,1$ ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $2<\alpha<2,1$.

7) أرسم كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) .



8) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $x(e-m)=\ln(x^2)$.

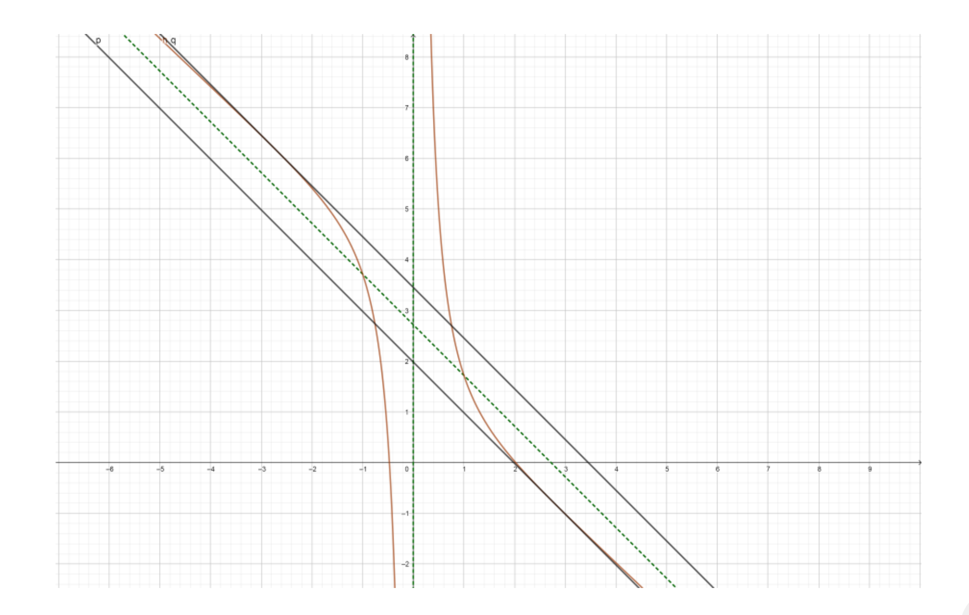
المعادلة معرفة من أجل $x\neq 0$ ولدينا :

$$x(e-m)=\ln(x^2)\Leftrightarrow e-m=\frac{2\ln|x|}{x}\Leftrightarrow m-e=-\frac{2\ln|x|}{x}\Leftrightarrow -x+e+m-e=-x+e-\frac{2\ln|x|}{x}$$
$$\Leftrightarrow h(x)=-x+m$$

حيث h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=-x+e-\frac{2\ln|x|}{x}$

من أجل $x>0$: $h(x)=-x+e-\frac{2\ln x}{x}=f(x)$

ولدينا $h(x)+h(-x)=-x+e-\frac{2\ln|x|}{x}+x+e+\frac{2\ln|-x|}{x}=2e$ لأن $|-x|=|x|$ ومنه منحنى الدالة h متناظر بالنسبة إلى النقطة $\omega(0;e)$ ويطابق (C_f) من أجل $x>0$.



المناقشة مناقشة بيانية وسيطية مائلة وتؤول إلى دراسة عدد نقط تقاطع منحنى الدالة h مع المستقيم $(d_m): y=-x+m$ والذي يوازي كلا من (Δ) ، (T) و (T') حيث $(T'): y=-x+e+\frac{2}{e}$ نظير (T) بالنسبة إلى النقطة ω ومنه :

من أجل $m\in\left]-\infty;e-\frac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

من أجل $m=e-\frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا

من أجل $m\in\left]e-\frac{2}{e};e\right[$ المعادلة تقبل 3 حلول

من أجل $m=e$ المعادلة تقبل حلين متمايزين

من أجل $m\in\left]e;e+\frac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل 3 حلول

من أجل $m=e+\frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا

من أجل $m\in\left]e+\frac{2}{e};+\infty\right[$ المعادلة تقبل حلا وحيد

انتهى تصحيح الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية وهران

المقاطعة الأولى (وهران شرق) الامتحان التجريبي لبكالوريا 2022في مادة الرياضيات

الشعبة :تقني رياضي المدة : أربع ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين فقط

الموضوع الأول

التمرين الأول(04ن) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $a_n = 2\times 5^n + 7$

1) أ- بيّـن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون a_n فردي.

ب- عيّـن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 8.

جـ- استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون $a_n \equiv 1[8]$.

2) أ- برهن أنه إذا كان: $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$ فإن: $x \equiv 257[1000]$.

ب- بيّـن أنه من أجل $n \geq 3$ يكون: $a_n \equiv 257[1000]$.

جـ- ما هي الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $(2\times 5^{2022}+7)(2\times 5^{2021}+7)$ ؟

3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$

ب- نعتبر $PGCD(a_{2n};a_{2n+1}) = d$، بيّـن أن d يختلف عن 7 ثم عيّـن قيمته.

التمرين الثاني(04ن) يوجد جواب صحيح واحد بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية، عينه مع التبرير.

1) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \left(\frac{2}{3}\alpha\right)^n$ حيث α عدد حقيقي موجب تماما، قيم مجموعة قم α التي تكون من أجلها (v_n) متتالية متقاربة هي:

أ) $\left]0;\frac{3}{2}\right[$ ب) $]-1;1[$ جـ) $\left]0;\frac{2}{3}\right[$

2) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $3y' - 2y + 6 = 0$ والذي يحقق الشرط $f(0) = 4$ هو:

أ) $f(x) = 3e^{\frac{2}{3}x} + 1$ ب) $f(x) = e^{\frac{2}{3}x} + 3$ جـ) $f(x) = 2e^{\frac{2}{3}x} + 2$

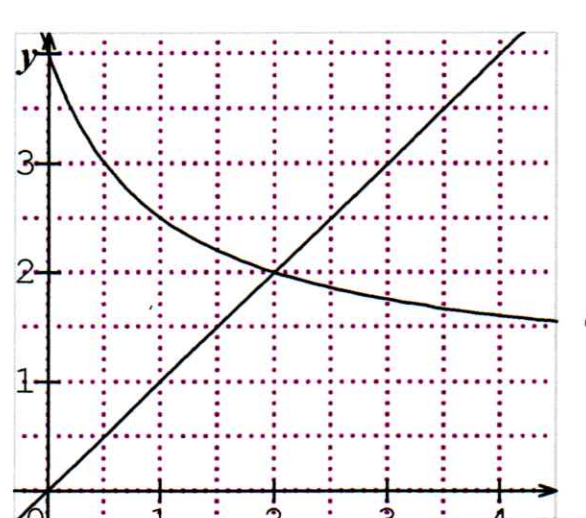
3) f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x+1}{x}$، الدالة الأصلية F للدالة f والتي تحقق $F(1) = 0$ هي الدالة المعرفة بـ:

أ) $F(x) = x - 1 + \ln x$ ب) $F(x) = 1 - x + \ln x$ جـ) $F(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

4) N عدد طبيعي، يكتب في النظام ذي الأساس 6 على الشكل $N = \overline{01355}^6$، كتابته في النظام العشري هي:

أ) $N = 2022$ ب) $N = 1439$ جـ) $N = 1962$

التمرين الثالث (05ن) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (أنظر الشكل).



1) بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N بـ: $u_0=1$

و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) انقل الشكل ثم مثّل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء،

ثم أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le \frac{5}{2}$.

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{12}{u_n+2}-3$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0.

ب) أوجد بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n=v_n+v_{n+1}+v_{n+2}+...+v_{n+2022}$

أحسب بدلالة n المجموع P_n بحيث: $P_n=\frac{1}{u_n+2}+\frac{1}{u_{n+1}+2}+\frac{1}{u_{n+2}+2}+\cdots+\frac{1}{u_{n+2022}+2}$

التمرين الرابع(07ن) g دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=-x-\ln x$

1) أ) أدرس تغيرات الدالة g .

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,56<\alpha<0,57$ ثم استنتج إشارة g على $]0;+\infty[$

2) لتكن f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسر النتيجتين هندسيا .

ب) بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث $0,2<x_0<0,3$ و $2,2<x_1<2,3$.

4) بيّن أن $f(\alpha)=-\alpha+1-\frac{1}{\alpha}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5) (γ) هو المنحنى الممثل للدالة ln في المعلم السابق .

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (γ) .

6) أ) احسب $f(1)$ ، $f(2)$ و $f(e)$ ثم ارسم (γ) و (C_f) .

ب) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x)=m$.

7) A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (γ) و (C_f) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x=\alpha$ و $x=e$.

– احسب A بدلالة α ثم تحقق أن : $A=\frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ مستنتجا حصرا لـ A

الموضوع الثاني

التمرين الأول(05ن) لكل سؤال جواب واحد صحيح فقط من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عينه مع التبرير:

1. حل المعادلة التفاضلية $3y'-2y+6=0$ و الدي يحقق $f(0)=4$ هو الدالة f المعرفة على Rبـ:

أ) $f(x)=e^{\frac{2}{3}x}-3$ ب) $f(x)=e^{\frac{2}{3}x}+3$ ج) $f(x)=2e^{\frac{2}{3}x}+3$

2. مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x-1)+\ln(x+2)\leq 2\ln 2$ في $\mathbb{R}$ هي:

أ) $S=[-2;2]$ ب) $S=]1;2]$ ج) $S=[-2;1]$

3. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x2^{-x}$, f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' هي:

أ/ $f'(x)=(1-x\ln2)e^{-x\ln2}$ ب/ $f'(x)=(1-x)2^{-x}$ ج/ $f'(x)=(2+x\ln 2)2^{-x}$

4. x عدد حقيقي موجب تماما , التكامل $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$ يساوي:

أ) $\frac{-2\ln x-1}{x}$ ب) $\frac{-\ln x}{x}-\frac{1}{x}$ ج) $\frac{-\ln x-1+x}{x}$

5. f الدالة المعرفة على R بـ : $f(x)=\ln(x^2+2x+3)$ من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

أ) $f(-2-x)=f(x)$ ب) $f(2-x)=f(x)$ ج) $f(-x)=f(x)$

التمرين الثاني(04ن) α ، β عددان طبيعيان كل منهما أصغر من 7؛ وليكنA العدد الطبيعي المضاعف لـ 7 والذي يكتب في نظام التعداد ذو الأساس 9 و 7 على الترتيب بـ: $\overline{2\alpha 8\beta}$ و $\overline{5\alpha 1\beta}$

1) جد α ، β ثم أكتب العدد A في النظام العشري.

2) أحسب $PGCD(2016,2268,2772)$

3) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية Z المعادلة ذات المجهولين x ، y

$$2772x-2268y=2016............(E)$$

أ. بيّن انه من اجل كل عددين حقيقيين x، y المعادلة (E) تكافئ $11x-9y=8$

ب. جـد (x_0,y_0) حل للمعادلة (E) والتي تحقق $x_0+y_0=8$

ت. استنتج في Z^2 مجموعة حلول المعادلة (E).

4) بفرض x و y موجبان و أن $(x\ ,\ y)$ حلل المعادلة (E) وبوضع $PGCD(x,y)=\text{d}$

أ. أوجد القيم الممكنة لـ d

ب) استنتج كل الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $PGCD(x,y)=2$

التمرين الثالث(04ن)

1)الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C_f)للدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ب : $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $[0,+\infty[$

ب)بيّن أنه إذا كان $x\in\left[0,\sqrt{3}\right]$ فإن $f(x)\in\left[0,\sqrt{3}\right]$

2) نعرّف المتتالية (u_n)كما يلي :

$u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) باستعمال التمثيل البياني (C_f)والمستقيم (Δ)

مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2على محور الفواصل دون حسابها

مبرزا خطوط التمثيل

ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)وتقاربها.

ب) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le\sqrt{3}$

ج) بيّن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(2-\sqrt{u_n+1})}{\sqrt{u_n^2+1}}$ ،ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

د)استنتج أن المتتالية (u_n)متقاربة

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي nب: $v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$

أ)برهن أن (v_n)متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب)أكتب عبارة v_nبدلالة nثم استنتج u_nبدلالة n

ج)أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

4) أحسب p_n بدلالة n حيث: $p_n=\dfrac{(u_0\times u_1\times\cdots\times u_n)^2}{(3-u_0^2)(3-u_1^2)\cdots(3-u_n^2)}$

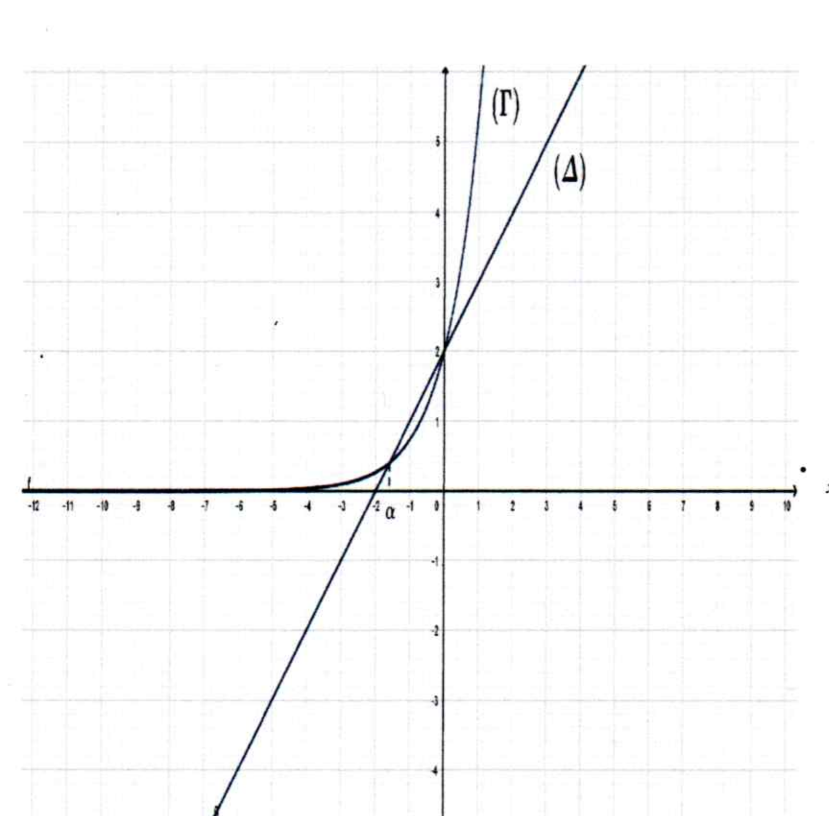
التمرين الرابع(07ن)

I) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، الشكل أدناه يتضمن (Γ)التمثيل البياني للدالة:

$x\to 2e^x$ ، (Δ)المستقيم ذو المعادلة : $y=x+2$ ، 0وα هما فاصلتا نقطتي تقاطع (Γ)و (Δ)

حيث : $-1{,}6\prec\alpha\prec-1{,}5$

1) بقراءة بيانية حدّد وضعية المنحني (Γ)بالنسبة إلى (Δ) على R



2) g لدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة على R

ب : $g(x) = -2e^{x} + x + 2$

حدّد إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) f الدالة العددية المعرفة على R بـ :

$f(x) = 2(ex-3) + (x+3)e^{-x+1}$ ،

(C_f) هو تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) أ – أحسب كلا من : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من R

: $f'(x) = -g(x)e^{-x+1}$.

ج) عيّن دون حساب: $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$،

ثم فسّر النتيجة هندسيا.

المستقيم (D) ذو المعادلة : $y = 2(ex-3)$ هو

مستقيم مقارب ل (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)

ب) بيّن أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيتيها .

ج) بيّن أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها β حيث: $-2,4 \prec \beta \prec -2,3$.

3) أنشئ كل من (D) و (C_f) . نأخذ $f(-3) \approx -22.31$ و $f(\alpha) \approx 4.15$

4-أ) جد العددين الحقيقيين a, b حتى تكون الدالة $x \to (ax+b)e^{-x+1}$ أصلية للدالة $x \to (x+3)e^{-x+1}$ على R

ب) أحسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (D) و المستقيمين الذين معادلتيها: $x=1$ و $x=n$

حيث n عدد طبيعي $(n \succ 1)$، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية الوطنية
وزارة التربية الوطنية

الإجابة النموذجية للموضوع اختبار مادة الرياضيات / الشعبة: تقني رياضي / بكالوريا تجريبي 2022

		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة	
التمرين الأول		لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $a_n = 2\times5^n + 7$		
		1) أ- بما أن a_n هو مجموع عددين أحدهما فردي والأخر زوجي إذا هو عدد فردي............	0.5	
		ب- n بواقي قسمة العدد 5^n على 8: من أجل $n=2k$: $5^n \equiv 1[8]$ و من أجل $n=2k+1$: $5^n \equiv 5[8]$	0.5	
		جـ- بما أن $2\times1+7 \equiv 1[8]$ و $2\times5+7 \equiv 1[8]$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $a_n \equiv 1[8]$	0.5	04
		2) أ- إذا كان: $\begin{cases} x\equiv1[8] \\ x\equiv7[125]\end{cases}$ فإن: $\begin{cases}125x\equiv125[1000] \\ 8x\equiv56[1000]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}125x\equiv125[1000] \\ 128x\equiv896[1000]\end{cases}$ بالطرح نجد $3x\equiv771[1000]$ أي $9x\equiv313[1000]$ اذا نجد $\begin{cases}8x\equiv56[1000] \\ 9x\equiv313[1000]\end{cases}$. ومنه $x\equiv257[1000]$	0.75	
		ب- من أجل $n\geq3$ يكون : 5^n مضاعف لـ 125 ومنه نجد $a_n\equiv7[125]$ ولدينا $a_n\equiv1[8]$ إذا نستنتج أن $a_n\equiv257[1000]$	0.5	
		جـ- بما أن $a_{2021}\equiv257[1000]$ و $a_{2022}\equiv257[1000]$ فإن $a_{2021}\times a_{2022}\equiv257^2[1000]$ أي $a_{2021}\times a_{2022}\equiv49[1000]$ اذا الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $(2\times5^{2021}+7)(2\times5^{2022}+7)$ هي 049	0.25 0.25	
		3) أ- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $5a_{2n}-a_{2n+1}=28$	0.25	
		ب- إذا كان $PGCD(a_{2n};a_{2n+1})=d$، فإن d يقسم a_n وبما أن 2×5^n ليس مضاعف لـ 7 فإن d يختلف عن 7	0.25	
		d يقسم 28 ويختلف عن 7 و a_n فردي اذا $d=1$	0.25	
التمرين الثاني		1) قيم α التي تكون من أجلها (v_n) متقاربة هي: أ) $\left]0;\frac{3}{2}\right[$ + التبرير...	01	
		2) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $3y'-2y+6=0$ والذي يحقق الشرط $f(0)=4$ هو: ب) $f(x)=e^{\frac{2}{3}x}+3$ + التبرير...	01	04
		3) الدالة الأصلية F والتي تحقق $F(1)=0$ للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x+1}{x}$ هي الدالة: أ) $F(x)=x-1+\ln x$ + التبرير...	01	
		4) N عدد طبيعي، يكتب في النظام ذي الأساس 6 على الشكل $N=\overline{01355}^6$، كتابته في النظام العشري هي: ب) $N=1439$ + التبرير...	01	

التمرين الثالث			
	f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x+4}{x+1}$. 1) بما أن $f'(x)=\frac{-3}{(x+1)^2}$ فإن f متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.	0.5	05
	2) أ- تمثيل الحدود الأربعة الأولى: U0 U2 U3 U1 التخمين: المتتالية (u_n) غير رتيبة ومتقاربة نحو 2	0.75 0.5	
	ب - البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le\frac{5}{2}$: لدينا $1\le u_0\le\frac{5}{2}$ و نفرض أن $1\le u_n\le\frac{5}{2}$ فنجد $1\le u_{n+1}\le\frac{5}{2}$ ومنه $1\le u_n\le\frac{5}{2}$	0.75	
	3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على ℕ بـ: $v_n=\frac{12}{u_n+2}-3$ أ - بما أن $v_n=\frac{6-3u_n}{u_n+2}$ ولدينا $v_{n+1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{6-3u_n}{u_n+2}\right)$ اذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=-\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=1$ .... ب -عبارة الحد العام: $v_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ و $u_n=\frac{12}{3+v_n}-2=\frac{12}{3+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}-2$ حساب النهاية: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$	0.75 0.5 0.25	
	ت - حساب S_n: $S_n=1\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2023}}{1+\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2023}\right)$ حساب P_n:	0.5 0.5	

<table>
<tr><td></td><td></td><td>ومنه $P_n = \frac{1}{12}(v_n + 3 + v_{n+1} + 3 + v_{n+2} + 3 ... + v_{n+2022} + 3)$
$P_n = \frac{1}{12}(S_n + 3 \times 2023)$.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">07</td><td>0.5

0.25

0.25</td><td>I. الدالة g معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ: $g(x) = -x - \ln x$
1) أ- $g'(x) \prec 0$ ومنه الدالة g متناقصة.
ب- بما أن الدالة g رتيبة و $g(0.56) \times g(0.57) \prec 0$
فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,56 < \alpha < 0,57$
إشارة $g(x)$:

x: 0 … α … +∞
g(x): ‖ + 0 −</td><td rowspan="6">التمرين الرابع</td></tr>
<tr><td>0.5
0.25</td><td>2) أ- من اجل كل x من المجال $]0, +\infty[$ نجد: $f(x) = \frac{-1+(x-1)\ln x}{x}$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$
$x = 0$ معادلة المستقيم المقارب للمنحنى (C)</td></tr>
<tr><td>0.5

0.75</td><td>ب -من اجل كل x من المجال $]0, +\infty[$ نجد: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$
إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$
جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0, +\infty[$:

x: 0 … α … +∞
f'(x): ‖ − 0 +
f(x): ‖ +∞ ↘ f(α) ↗ +∞</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>3) حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $0,2 < x_0 < 0,3$
و $2,2 < x_1 < 2,3$ إذا المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين</td></tr>
<tr><td>0.25
0.25</td><td>4) **من** $g(\alpha) = 0$ لدينا $\ln\alpha = -\alpha$ وبالتعويض نجد: $f(\alpha) = -\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha}$
حصر $f(\alpha)$
$-1.35 \le f(\alpha) \le -1.31$</td></tr>
</table>

	العلامة	
5) لدينا $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1-\ln x}{x}\right]=0$ ومنه المنحنى (γ) هو منحنى مقارب للمنحنى (C_f) – وضعية (C_f) بالنسبة إلى (γ):	0.5 0.5	
6) أ– حساب $f(1)$، $f(2)$ و $f(e)$ ارسم (γ) و (C_f)	0.5	
ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة: $f(x)=m$ $m \prec f(\alpha)$ لا يوجد حلول $m=f(\alpha)$ يوجد حل وحيد $m \succ f(\alpha)$ يوجد حلين مختلفين	0.5	
7) حساب المساحة A : $A=\left[\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_\alpha^e=\frac{3}{2}-\ln\alpha-\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2$ – التحقق أن: $A=\frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ بتعويض $\ln\alpha=-\alpha$ حصر A : $1.89 \prec A \prec 1.91$	0.5 0.25 0.25	

x	0	e^{-1}	$+\infty$
f(x)-lnx	+	0	−
الوضع النسبي	(C_f) فوق (γ)	تقاطع	(C_f) تحت (γ)

(C_f)

(γ)

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية الوطنية
وزارة التربية الوطنية

الحل النموذجي لبكالوريا التجريبي دورة ماي 2022 **الشعبة : تقني رياضي**

الموضوع الثاني التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	حل التمرين الأول:		05 ن
	1-الإجابة الصحيحة هي : (ب)		
	التبرير : $3y'-2y+6=0$	01ن	
	يكافئ $y'=\frac{2}{3}y-2$		
	$y=ce^{\frac{2}{3}x}+3$		
	ومنه $f(x)=ce^{\frac{2}{3}x}+3$		
	2-الإجابة الصحيحة هي: (ب)	01ن	
	التبرير : $D=]1;+\infty[$ $\ln(x-1)+\ln(x+2)\leq 2\ln 2.........(1)$		
	(1) يكافئ $\ln[(x-1)(x+2)]\leq\ln 4$		
	تكافئ $x^2+2x-x-2\leq 4$		
	$x^2+x-6\leq 0$		
	ومنه $S=]1;2]$	01ن	
	3--الإجابة الصحيحة هي: (أ)		
	التبرير : $f(x)=xe^{-x}$		
	$f'(x)=xe^{-x\ln 2}$		
	يكافئ $f'(x)=e^{-x\ln 2}+(-\ln 2)e^{-x\ln 2}.x$		
	$f'(x)=e^{-x\ln 2}(1-x\ln 2)$		
	ومنه $f'(x)=(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$	01ن	
	4---الإجابة الصحيحة هي: (ج)		

التبرير:

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt = [\frac{-\ln t}{t}]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{t^2}dt$$

$$= \frac{-\ln x}{x} - [\frac{1}{t}+c]_1^x$$

$$= \frac{-\ln x}{x} - (\frac{1}{x}+c-1-c)$$

$$= \frac{-\ln x - 1 + x}{x}$$

01ن

5-الإجابة الصحيحة هي: (أ)

التبرير:

$$f(x) = \ln(x^2+2x+3)$$

$$f(-2-x) = \ln[(-2-x)^2 + 2(-2-x)+3]$$

$$= \ln(4+x^2+4x-4-2x+3)$$

$$= \ln(x^2+2x+3)$$

$$= f(x)$$

التمرين الثالث:

04ن

أ- تحديد اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,+\infty[$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ و $f'(x) = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \succ 0$ هذا يعني

الدالة f متزايد تماماعلى المجال $[0,+\infty[$

0.5ن

1-ب) نبين إذا كان $1 \le x \le \sqrt{3}$ فإن $1 \le f(x) \le \sqrt{3}$

لدينا من أجل $1 \le x \le \sqrt{3}$ فإن $f(1) \le f(x) \le f(\sqrt{3})$ (لأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[1,\sqrt{3}\right]$)ومنه

$\sqrt{2} \le f(x) \le \sqrt{3}$ ومنه $1 \le \sqrt{2} \le f(x) \le \sqrt{3}$ ومنه $1 \le f(x) \le \sqrt{3}$ وهو المطلوب

0.25ن

2-أ) تمثيل الحدود u_0, u_1 و u_2 على محور الفواصل

نسقط النقطة $M_0(u_0=1, u_1)$ على (Δ) وفق (ox) ثم نسقط نقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (oy) نحصل على النقطة $M_1(u_1, u_2)$ وهكذا نكرر العملية نحصل على M_2

0.25ن

ب)يبدو من خلا ل الرسم المتتالية (u_n) متزايدة على ومتقاربة نحو العدد $\sqrt{3}$

2-ب) لنبرهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le \sqrt{3}$.

لنتحقق من أجل $n=0$ أي : $1 \le u_0 = 1 \le \sqrt{3}$ (محققة)

نفرض أن : $1 \le u_n \le \sqrt{3}$ و لنثبت : $1 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$

لدينا فرضا : $1 \le u_n \le \sqrt{3}$ ومنه : $f(1) \le f(u_n) \le f(\sqrt{3})$ (حسب سؤال رقم 1-ب) ومنه $1 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$ صحيحة

وبالتالي $1 \le u_n \le \sqrt{3}$ صحيحة

0.5ن

ج) نبين من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(2-\sqrt{u_n^2+1})}{\sqrt{u_n^2+1}}$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} - u_n = \dfrac{2u_n - u_n\sqrt{u_n^2+1}}{\sqrt{u_n^2+1}} = \dfrac{u_n(2-\sqrt{u_n^2+1})}{\sqrt{u_n^2+1}}$ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n \le \sqrt{3}$ ومنه $1 \le u_n^2 \le 3$ ومنه $2 \le u_n^2 + 1 \le 4$

ومنه $\sqrt{2} \le \sqrt{u_n^2+1} \le 2$ ومنه $-2 \le -\sqrt{u_n^2+1} \le -\sqrt{2}$ ومنه $0 \le 2-\sqrt{u_n^2+1} \le 2-\sqrt{2}$ وبالتالي:

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(2-\sqrt{u_n^2+1})}{\sqrt{u_n^2+1}} \ge 0$ وعليه المتتالية (u_n) متزايدة على

0.25ن

بما ان المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الاعلى فهي متقاربة

3)نبين (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2} = \frac{\dfrac{4u_n^2}{u_n^2+1}}{3-\dfrac{4u_n^2}{u_n^2+1}} = \frac{4u_n^2}{u_n^2+1} \times \frac{u_n^2+1}{-u_n^2+3} = 4\left(\frac{u_n^2}{3-u_n^2}\right) = 4v_n$$

0.25ن

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدها الاول $v_0=\frac{1}{2}$

عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $v_n=\frac{1}{2}(4)^n$ أي $v_n=2^{2n-1}$ — 0.25ن

عبارة الحد العام u_n بدلالة n : بوضع $v_n=y$ و $u_n=x$ المساواة $v_n=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$ تكافيء

$y=\frac{x^2}{3-x^2}$ أي $y\left(3-x^2\right)=x^2$ أي $3y-yx^2=x^2$ أي $3y=yx^2+x^2=x^2(y+1)$ أي

$x^2=\frac{3y}{1+y}$ هذا يعني: $u_n^2=\frac{3v_n}{1+v_n}$ هذا يعني $u_n=\sqrt{\frac{3v_n}{1+v_n}}$ أو $u_n=-\sqrt{\frac{3v_n}{1+v_n}}$ بماأن — 05ن

المتتالية (u_n) موجبة فإن: $u_n=\sqrt{\frac{3v_n}{1+v_n}}$ أي $u_n=\sqrt{\frac{3(2^{2n-1})}{1+(2^{2n-1})}}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3(2^{2n-1})}{1+(2^{2n-1})}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3(2^{2n-1})}{(2^{2n-1})}=3$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}2^{2n-1}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{3}$ — 0.25ن

حساب بدلالة n الجداء: $p_n=\frac{\left(u_0\times u_1\times\cdots\times u_n\right)^2}{\left(3-u_0{}^2\right)\left(3-u_1{}^2\right)\cdots\left(3-u_n{}^2\right)}$ — 0.25ن

$$\begin{aligned}p_n&=v_0\times v_1\times v_2\cdots\times v_n=v_0\times v_0\times q\cdots\times v_0\times q^n\\&=v_0{}^{n+1}\times q^{1+2+\cdots+n}\\&=v_0^{n+1}\times q^{1+2+\cdots+n}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\times q^{\frac{n(n+1)}{2}}\\&=2^{-n-1}\times2^{n^2+n}\\&=2^{n^2-1}\end{aligned}$$ — 0.25ن

<u>**حل التمرين الثاني:**</u>

الجزءالاول:

تحديد وضعية المنحني (Γ) بالنسبة إلى (Δ)

لدينا من أجل $x\in]-\infty,\alpha[\cup]0,+\infty[$ أعلى (Δ) — 0.25ن

ومن أجل $x\in]\alpha,0[$ (Γ) أسفل (Δ)

ومن أجل $x=\alpha$ أو $x=0$ لدينا $(\Gamma)\cap(\Delta)=\{(\alpha,\alpha+2),(0,2)\}$ — 0.25ن

	تحديد إشارة $g(x)$: لدينا $g(x)=0$ من أجل $x=\alpha$ أو $x=0$ $g(x)\succ 0$ من أجل $x\in]\alpha,0[$ و $g(x)\prec 0$ من أجل $x\in]-\infty,\alpha[\cup]0,+\infty[$ **الجزء الثاني:** f دالة معرفة على ℝ ب: $f(x)=2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}$ **حساب النهايات:** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} 2(ex-3)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}(x+3)e^{-x+1}=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty+\infty$ (حالة عدم التعيين) إزالتها لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2(ex-3)+e\left(\frac{x}{e^x}+\frac{3}{e^x}\right)=+\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}+\frac{3}{e^x}=0$	0.25ن	07ن
	نبين من أجل كل عدد حقيقي: $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$ الدالة f قابلة للإشتقاق على ℝ و عبارة دالتها المشتقة هي : $f'(x)=2e+e^{-x+1}-(x+3)e^{-x+1}=2e\left(e^{-x+1}\right)\left(e^{+x-1}\right)+e^{-x+1}-(x+3)e^{-x+1}$ ومنه. $f'(x)=\left(e^{-x+1}\right)\left[2e\times e^{x-1}+1-x-3\right]=e^{-x+1}(2e^x-x-2)=-e^{-x+1}(-2e^x+x+2)$ ومنه : $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$	0.50ن	
	حساب $\lim_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ لدينا $\lim_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=0$ **التفسير الهندسي:** (C_f) يقبل مماس عند نقطة ذات الفاصلة α موازي لحامل محور فواصل	0.25ن	
	دراسة اتجاه تغير الدالة f **:** إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ $f'(x)=0$ من أجل $x=0$ أو $x=\alpha$ $f'(x)\succ 0$ من أجل $x\in]-\infty,\alpha[\cup]0,+\infty[$ معناه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,\alpha[$ و $]0,+\infty[$	0.25ن	

$f'(x) \prec 0$ من أجل $x \in]0,\alpha[$ معناه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0,\alpha[$.

جدول تغيرات الدالة f

0.75ن

2-أ)نبين أن المستقيم (D) ذو المع

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)e^{-x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{3}{e^x}\right)e = 0$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) : لدينا $f(x)-y=(x+3)e^{-x+1}$

0.5ن

إشارة $f(x)-y$ من إشارة العدد $x+3$ ومنه على المجال $]-\infty,-3]$ (C_f) أسفل (D)

وعلى المجال $[-3,+\infty[$ (C_f) أعلى (D) ومن أجل $x=-3$ (C_f) يقطع (D) في نقطة $(-3,2(-3e-3))$

نبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف: لدينا f' قابلة للإشتقاق على □و

0.25ن

$f''(x)=(x+1)e^{-x+1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$f''(x)$ تنعدم عند قيمة $x_0=-1$ مغيرة إشارتها وعليه النقطة $A(1, f(1)=2e-2)$ نقطة انعطاف للمحني البياني (C_f)

نبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فا صلتها β بحيث: $-2,4<\beta<-2,3$

0.5ن

لدينا الدالة f معرفة و مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]-\infty,\alpha]$ و بالخصوص على المجال $[-2,4,-2,3]$ ومن جهة أخرى

لدينا $f(-2,3)\times f(-2,4)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم

المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $-2,4<\beta<-2,3$ أي (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة

فا صلتها β بحيث: $-2,4<\beta<-2,3$

0.25ن

رسم المنحنى (C_f) و (D)

إيجاد العددين الحقيقيين a و b بحيث

حتى تكون الدالة $x \longrightarrow (ax+b)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية لدالة

0.50ن

$x \longrightarrow (x+3)e^{-x+1}$ على □

تكون الدالة $x \longrightarrow (ax+b)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية

للدالة $x \longrightarrow (x+3)e^{-x+1}$ إذا وفقط تحقق ما يلي من أجل كل

	عدد حقيقي x لدينا: $ae^{-x+1}-(ax+b)e^{-x+1}=(x+3)e^{-x+1}$	0.5ن
	أي	
	بالمطابقة $(-ax-b+a)e^{-x+1}=(x+3)e^{-x+1}$	
	نجد : $-a=1$ و $-b+a=3$ ومنه نجد $a=-1$	
	و $b=-4$	
	حساب مساحة الحيز المحددة بين المستقيمين: $x=1$ و $x=n$	0.5ن
	بحيث $n\succ 1$ والمستقيم (D)	
	$I_n=\int_1^n [f(x)-y]dx=\left[-(x+4)e^{-x+1}\right]_1^n=-(n+4)e^{-n+1}+5$	
	ومنه $\lim_{n\to+\infty} I_n=\lim_{n\to+\infty}-(n+4)e^{-n+1}+5=+5$	0.5ن
	لأن: $\lim_{n\to+\infty}-(n+4)e^{-n+1}=\lim_{n\to+\infty}-(\frac{n}{e^n}+\frac{4}{e^n})e=0$	
	حل التمرين الرابع:	
	) إيجاد α و β :	
	لدينا $\begin{cases}A=\beta+8.9^1+\alpha.9^2+2.9^3\\A=\beta+7+\alpha.7^2+5.7^3\end{cases}$	0.5ن
	أي $\begin{cases}A=\beta+81\alpha+1530\\A=\beta+49\alpha+1722\end{cases}$	
	ومنه $32\alpha-192=0$	
	وبالتالي $\alpha=\frac{192}{32}=6$	0.5ن
	نعوض α في الجملة نجد: $\begin{cases}A=\beta+2016\\A=\beta+2016\end{cases}$	
	لدينا $A\equiv 0[7]$	
	أي $\beta+2016\equiv 0[7]$	

$\beta \equiv 0[7]$

$\beta = 7k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

بماأن $0 \le \beta < 7$ — 0.25ن

فإن $\beta = 0$

ومنه $\alpha = 6$ و $\beta = 0$ — 0.25ن

•كتابة العدد A في النظام العشري:

لدينا $\alpha = 6$ و $\beta = 0$

$A = \beta + 81\alpha + 1530$

$A = 0 + 81(6) + 1530$

ومنه $A = 2016$ — 0.4ن

2) حساب PGCD :

$PGCD(2016; 2268; 2772) = 252$ — 0.7ن

3) لدينا المعادلة (E) $2772x - 2268y = 2016$ تكافئ $11x - 9y = 8$ .....(*)

إيجاد $(x_0; y_0)$:

لدينا $x_0 + y_0 = 8$ تكافئ $x_0 = 8 - y_0$

بالتعويض في (*) نجد: $11(8 - y_0) - 9y_0 = 8$ تكافئ $88 - 11y_0 - 9y_0 = 8$

تكافئ $88 - 20y_0 = 8$

تكافئ $y_0 = 4$

ومنه $(x_0; y_0) = (4; 4)$

• استنتاج مجموعة حلول المعادلة(E):

$$\begin{cases} 11x - 9y = 8 ....(*) \\ 11(4) - 9(4) = 8 \end{cases}$$

ومنه $11(x-4) - 9(y-4) = 0$ تكافئ $11(x-4) = 9(y-4)$

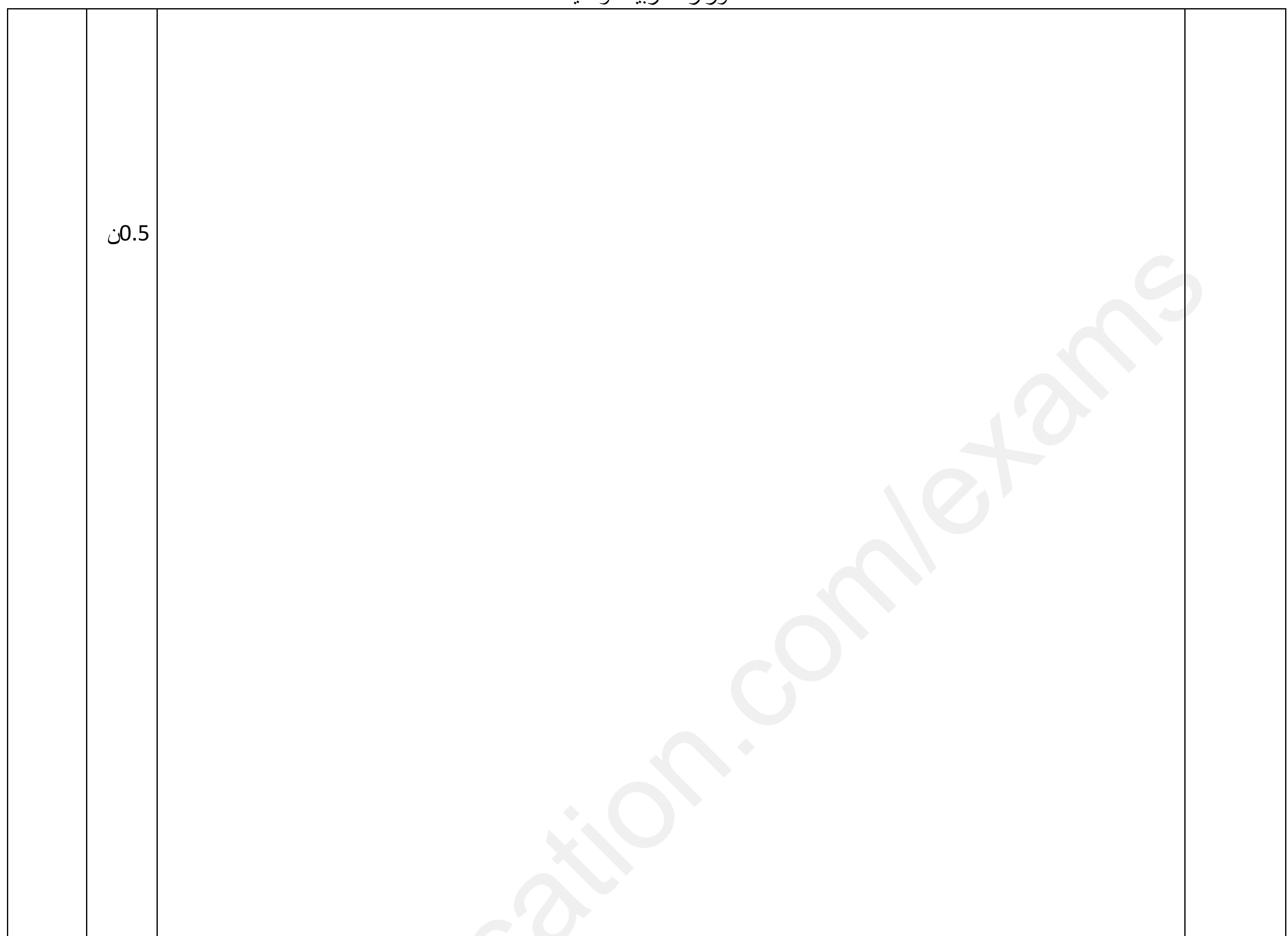
أي $11 / 9(y-4)$

و $\text{PGCD}(11;9) = 1$

حسب مبرهنة غوص : $11 / y - 4$

أي $y - 4 = 11k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

	ومنه $y = 11k + 4$	0.25ن	
	بالتعويض في (*) نجد $11x - 9(11k+4) = 8$ تكافئ $11x - 99k - 36 = 8$		
	تكافئ $11x = 99k + 44$	0.50ن	
	تكافئ $x = 9k + 4$		
	ومنه: $S = \{(9k+4; 11k+4) / k \in \mathbb{Z}\}$		
	❖) إيجاد قيم d:		
	$\begin{cases} d / x \\ d / y \end{cases}$ هذا يعني $d / 11x - 9y$	0.25ن	
	أي $d / 8$	0.25ن	
	و منه $d \in \{1; 2; 4; 8\}$		
	2) استنتاج الثنائية $(x; y)$:		
	لدينا $PGCD(x; y) = 2$ يكافئ $\begin{cases} 2 / (11k+4) \\ 2 / (9k+4) \end{cases}$		
	يكافئ $\begin{cases} 11k + 4 \equiv 0[2] \\ 9k + 4 \equiv 0[2] \end{cases}$		
	يكافئ $\begin{cases} k \equiv 0[2] \\ k \equiv 0[2] \end{cases}$		
	أي $k' \in \mathbb{Z}$; $k = 2k'$	01ن	
	ومنه $\begin{cases} x = 11(2k') + 4 \\ y = 9(2k') + 4 \end{cases}$		
	إذن $S = \{(22k' + 4; 18k' + 4)\}$		
		0.5ن	



0.5ن



سنة ثالثة ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

إمتحان بكالوريا تجريبية 2022
شعبة
علوم تجريبية

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

تاريخ النشر:

[17 ماي 2022]



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية، اقترحت ثلاث إجابات، واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل

❶ حلول للمعادلة التفاضلية $y - y' = 1$ التي تحقق $y(0) = e$ هي:

أ/ $y = e^{x+1}$ ب/ $y = e^{x+1} - e^{x} + 1$ ج/ $y = e^{x+1} + 1$

❷ قيمة التكامل A حيث: $A = \int_{-1}^{1} xe^{x}dx$ هي:

أ/ $A = 2e^{-1}$ ب/ $A = 2e$ ج/ $A = 2 + e$

❸ حلول المعادلة: $e^{x} - \sqrt{e^{x-1}} = 0$ هي:

أ/ $S \in \{-1; 1\}$ ب/ $S \in \{0\}$ ج/ $S \in \{-1\}$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ -1، 1، 2 وخمس كرات بيضاء مرقمة بـ 1، 1، 1، 2، 2 وكرتان خضراوان مرقمتان بـ -1 ، -1 (كل الكرات لا نميز بينها عند اللمس)

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات

نعتبر الحوادث التالية:

A: "الكرات المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى"

B: "يوجد على الأقل كرة خضراء واحدة"

C: "الكرات المسحوبة مجموع أرقامها معدوم"

❶ احسب احتمال الحوادث A، B و C

❷ علما أنّ مجموع أرقام الكريات المسحوبة معدوم، ما احتمال أن تكون مختلفة في اللون مثنى مثنى

❸ ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد ألوان الكرات المسحوبة

أ/ بيّن أنّ $p(X=2)=\frac{79}{120}$ ، ثم أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X

ب/ احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ ثم احسب الاحتمال $P(X^2 - 2X \geq 3)$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right)$

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $2 < u_n < 4$

❷ بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما، ثمّ استنتج أنها متقاربة

❸ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

❹ استنتج أنّ $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$، ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$

❺ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$

أ/ بيّن أنّ (v_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول

ب/ اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج/ اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + x + 2\ln x$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة g

❷ احسب $g(1)$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$

II) الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{-1 + (x-2)\ln x}{x}$، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$)

❶ احسب $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)$، وفسر النتيجة هندسيا، ثمّ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

❷ أ/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب/ عيّن اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

❸ ليكن (Γ) المنحنى البياني الممثل للدالة: $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$

أ/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x)$، ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ)

❹ بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β، ثم تحقق أنّ:

$0.5 < \alpha < 0.6$ و $2.9 < \beta < 3$

❺ ارسم (Γ) ثم (C_f)

❻ احسب A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (Γ) والمستقيمان ذو المعادلتان $x = 1$ و $x = e$

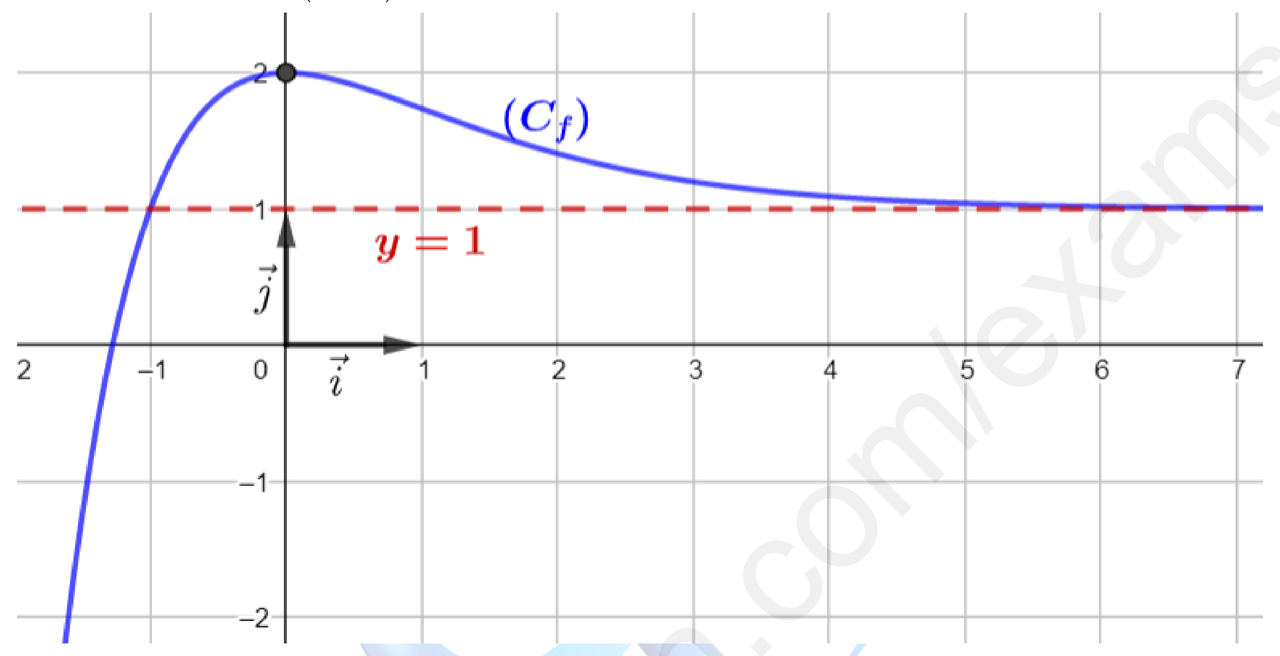
انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (03 نقاط)

I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (ax+b)e^{-x} + c$ حيث a، b و c أعداد حقيقية

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$)



- بقراءة بيانية، عيّن a، b و c

II) نضع: $a = b = c = 1$

❶ باستعمال المكاملة بالتجزئة، عيّن دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل -1

❷ بيّن أن $A = (e-1)cm^2$ حيث A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x = -1$ و $x = 0$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

صندوق به ثلاث كريات حمراء وأربع كريات بيضاء و كريتين خضراوين

نسحب عشوائيا كريتان على التوالي بدون إرجاع

نعتبر الحوادث التالية: A: "الكرتان المسحوبتان من نفس اللون"

B: "سحب كرية بيضاء في المرة الأولى"

❶ احسب احتمال الحوادث A و B

❷ استنتج احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين

❸ علما أنّ الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء، احسب احتمال سحب كرتان من نفس اللون

❹ ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات البيضاء المسحوبة

أ/ عيّن قيم المتغير العشوائي X، ثم أكتب قانون احتماله

ب/ احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ ثم احسب $E(1443X + 2022)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) لتكن الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

❷ بيّن أنه من أجل كل $x \geq 1$ فإنّ: $f(x) \geq 1$

II) لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؛ $u_{n+1} = f(u_n)$

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فإنّ: $u_n \geq 1$

❷ بيّن أنّ (u_n) متناقصة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة

❸ نضع من أجل كل n طبيعي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

أ/ بيّن أن (w_n) هندسية أساسها 2 واحسب w_0

ب/ اكتب بدلالة n عبارة w_n ، ثم استنتج بدلالة n عبارة v_n

❹ استنتج عبارة u_n بدلالة n، ثم احسب نهاية (u_n)

❺ أ/ اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

ب/ اكتب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (1-x)e^{2-x} + 1$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة g، ثمّ شكل جدول تغيراتها

❷ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ $g(x) \geq 0$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x - 2 + xe^{2-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول هي $1cm$)

❶ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

❷ أ/ احسب $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-2)]$ ، ماذا تستنتج؟

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) حيث $(\Delta): y = x - 2$

❸ أ/ بيّن أنه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = g(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

❹ بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.31; 0.32[$

❺ بيّن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها

❻ بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلة له

❼ ارسم (T) ،(Δ) و (C_f)

❽ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للإمتحانات والمسابقات
إمتحان بكالوريا تجريبي
ثانوية: صديقي النوري – الجلفة



دورة: 2022
الشعبة: علوم تجريبية

تصحيح مقترح لاختبار مادة الرياضيات

الموضوع الأول

◆ التمرين الأول: (03 نقاط)

[01ن] ❶ حلول للمعادلة التفاضلية $y - y' = 1$ التي تحقق $y(0) = e$ هي: $\boxed{y = e^{x+1} - e^x + 1}$

التبرير:

لدينا:

$$y - y' = 1 \Rightarrow y' = y - 1 \Rightarrow y = Ce^x - \frac{-1}{1} \Rightarrow Ce^x + 1$$

ولدينا:

$$y(0) = e \Rightarrow Ce^0 + 1 = e \Rightarrow C = e - 1$$

ومنه:

$$y = (e-1)e^x + 1 \Rightarrow y = e^{x+1} - e^x + 1$$

[01ن] ❷ التكامل A حيث: $A = \int_{-1}^{1}(xe^x)dx$ هي: $\boxed{A = 2e^{-1}}$

التبرير:

$$A = \int_{-1}^{1}(xe^x)dx$$

نضع: $u(x) = x$ و $v'(x) = e^x$

ومنه: $u'(x) = 1$ و $v(x) = e^x$

إذن:

$$A = \int_{-1}^{1}(xe^x)dx = [xe^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx = [xe^x - e^x]_{-1}^{1} = 2e^{-1}$$

[01ن] ❸ حلول المعادلة: $e^x - \sqrt{e^{x-1}} = 0$ هي: $\boxed{S \in \{-1\}}$

التبرير:

$$e^x - \sqrt{e^{x-1}} = 0 \Rightarrow e^x = \sqrt{e^{x-1}} \Rightarrow e^{2x} = e^{x-1} \Rightarrow 2x = x - 1 \Rightarrow x = -1$$

◆ التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

[1.5ن] ❶ حساب احتمال الحوادث A، B و C:

$$p(A) = \frac{C_3^1 C_5^1 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{3 \times 5 \times 2}{120} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$p(B) = \frac{C_2^1 C_8^2 + C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{2 \times 28 + 1 \times 8}{120} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

$$p(C)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{3\times 3}{120}=\boxed{\frac{3}{40}}$$

[0.5ن] ❷ حساب احتمال أن تكون مختلفة في اللون مثنى مثنى علما أنّ مجموع أرقامها معدوم:

$$p_C(A)=\frac{p(A\cap C)}{p(C)}=\frac{\frac{C_2^1C_2^1C_1^1}{C_{10}^3}}{\frac{3}{40}}=\frac{\frac{2\times 2\times 1}{120}}{\frac{3}{40}}=\boxed{\frac{4}{9}}$$

[0.5ن] ❸ أ/ تبيين أنّ $p(X=2)=\frac{79}{120}$:

$$p(X=2)=\frac{C_3^2C_7^1+C_5^2C_5^1+C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\boxed{\frac{79}{120}}$$

[01ن] - كتابة قانون احتمال X:

لدينا: $X(\Omega)=\{1;2;3\}$ حيث:

$$p(X=1)=\frac{C_3^3+C_5^3}{C_{10}^3}=\boxed{\frac{11}{120}}$$

$$p(X=2)=\boxed{\frac{79}{120}}$$

$$p(X=3)=\frac{C_3^1C_5^1C_2^1}{C_{10}^3}=\boxed{\frac{30}{120}}$$

ومنه:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$

[0.5ن] ب/ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=1\frac{11}{179}+2\frac{79}{120}+3\frac{30}{120}=\boxed{\frac{259}{120}}$$

[0.5ن] • حساب $P(X^2-2X\geq 3)$

$$P(X^2-2X\geq 3)=P(X^2-2X-3\geq 0)=P\big((X+1)(X-3)\geq 0\big)$$

لدينا:

X	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$(X+1)(X-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن:

$$P(X^2-2X\geq 3)=P(X=3)=\boxed{\frac{30}{120}}$$

◆ التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

[0.5ن] ❶ برهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $2<u_n\leq 4$:

نسمي الخاصية $P(n)$ ... $2<u_n<4$

• لدينا: $2<u_0<4$ ومنه: $2<3<4$ إذن القضية $P(n)$ محققة من أجل $n=0$

• نفرض أنّ: $2<u_n<4$ ونثبت أنّ $2<u_{n+1}<4$

• لدينا:

$$2<u_n<4\Rightarrow 4<u_n+2<6\Rightarrow \frac{1}{6}\leq\frac{1}{u_n+2}<\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{3}{4}<-\frac{3}{u_n+2}<-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < 1 - \frac{3}{u_n + 2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < 8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) < 4 \Rightarrow 2 < u_{n+1} < 4$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع $P(n)$ محققة

[0.5ن] ❷ تبيين أنّ (u_n) متزايدة تماما ، ثمّ استنتاج أنها متقاربة:

$$u_{n+1} - u_n = 8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) - u_n = \frac{-(u_n)^2 + 6u_n - 8}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2}$$

لدينا: $2 < u_n < 4$ ومنه: $0 < u_n - 2 < 2$

لدينا: $2 < u_n < 4$ ومنه: $-2 < u_n - 4 < 0$

لدينا: $2 < u_n < 4$ ومنه: $4 < u_n + 2 < 6$

إذن: $\frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2} > 0$ وعليه (u_n) متزايدة تماما

• وبما أنّ (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 4 فهي متقاربة

[0.5ن] ❸ تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$:

لدينا:

$$4 - u_{n+1} = 4 - 8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) \Rightarrow 4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2}$$

ولدينا: (u_n) متزايدة ولدينا $u_0 = 3$ ومنه:

$$u_n \geq 3 \Rightarrow u_n + 2 \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} \leq \frac{4(4 - u_n)}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)}$$

[0.5ن] ❹ استنتاج أنّ $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$:

لدينا: $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$ ومنه:

$$\begin{cases} 4 - u_1 \leq \frac{4}{5}(4 - u_0) \\ 4 - u_2 \leq \frac{4}{5}(4 - u_1) \\ \vdots \\ 4 - u_n \leq \frac{4}{5}(4 - u_{n-1}) \end{cases}$$

بالضرب طرفا لطرف نجد:

$$(4 - u_1) \times (4 - u_2) \times \ldots \times (4 - u_n) \leq \frac{4}{5}(4 - u_0)\frac{4}{5}(4 - u_1) \times \ldots \times \frac{4}{5}(4 - u_{n-1})$$

ومنه:

$$4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n (4 - u_0) \Rightarrow 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ldots (*)$$

ولدينا:

$$u_n < 4 \Rightarrow -4 < -u_n \Rightarrow 0 < 4 - u_n \ldots (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

$$\boxed{0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

- حساب $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$: [0.5ن]

$$0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow 0 < \lim_{n\to+\infty}(4-u_n) \leq \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$$
$$\Rightarrow 0 < \lim_{n\to+\infty}(4-u_n) \leq 0$$

حسب مبدأ النهايات بالحصر نجد أنّ: $\lim_{n\to+\infty}(4-u_n) = 0$

ومنه: $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 4}$

5

أ/ تبيين أنّ (v_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول: [0.5ن]

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}-2} = \frac{8\left(1-\frac{3}{u_n+2}\right)-4}{8\left(1-\frac{3}{u_n+2}\right)-2} = \frac{4u_n-16}{6u_n-12} = \frac{4(u_n-4)}{6(u_n-2)} = \frac{2}{3}v_n$$

ولدينا:

$$v_0 = \frac{u_0-4}{u_0-2} = -1$$

ب/ كتابة عبارة v_n بدلالة n: [0.5ن]

$$v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n: [0.5ن]

$$v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2} \Rightarrow v_nu_n - 2v_n - u_n = -4 \Rightarrow u_n(v_n-1) = -4+2v_n$$

$$\Rightarrow u_n = 2\frac{v_n-2}{v_n-1} \Rightarrow \boxed{u_n = 2\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}}$$

ج/ اكتب بدلالة n المجموع S_n [0.5ن]

$$u_n = 2\frac{v_n-2}{v_n-1} = 2\frac{v_n-1-1}{v_n-1} = 2\left(1-\frac{1}{v_n-1}\right)$$

ومنه:

$$S_n = v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n = -\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = \boxed{3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right)}$$

◆ التمرين الرابع: (08 نقاط)

I)

1 دراسة اتجاه تغير الدالة g: [0.5ن]

$$g'(x) = 1+2\frac{1}{x} = \frac{x+2}{x}$$

لدينا: $g'(x) > 0$ لما $x \in \mathbb{R}_+^*$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$

2 حساب $g(1)$: [0.25ن]

$$g(1) = -1+1+2\ln 1 = 0$$

- استنتاج إشارة $g(x)$: [0.5ن]

بما أن الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]0;+\infty[$ ، و $g(1)=0$ فإنّ:

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

(II

[0.5ن] ❶ أ/ حساب $\lim\limits_{x \to 0^>} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^>} f(x) = \lim_{x\to 0^>}\left(\frac{-1+\overbrace{x\ln x}^{0}-2\ln x}{x}\right) = +\infty$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

[0.5ن] ب/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+\ln x - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

[0.75ن] ❷ أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\left(\ln x + \frac{x-2}{x}\right)x - (-1+(x-2)\ln x)}{x^2} = \frac{x-1+2\ln x}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

[0.75ن] ب/ تعيين اتجاه تغير الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول تغيرات الدالة f:

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ -1 ↗ $+\infty$

[0.75ن] ❸ أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1+(x-2)\ln x}{x} - \ln x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+\ln x - 2\frac{\ln x}{x} - \ln x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

- التفسير الهندسي: (C_f) و (Γ) متقاربان بجوار $+\infty$

[0.5ن] ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ):

$$f(x)-\ln x = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x} = 0 \Rightarrow -1-2\ln x = 0$$
$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

x	0 $\quad$ $e^{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)-\ln x$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

- (C_f) فوق (Γ) لما $x \in \left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right[$
- (C_f) يقطع (Γ) لما $x = e^{-\frac{1}{2}}$
- (C_f) تحت (Γ) لما $x \in \left]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right[$

[01ن] ❹ **تبيين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:**

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين

- **التحقق أنّ: $0.5 < \alpha < 0.6$ و $2.9 < \beta < 3$:**

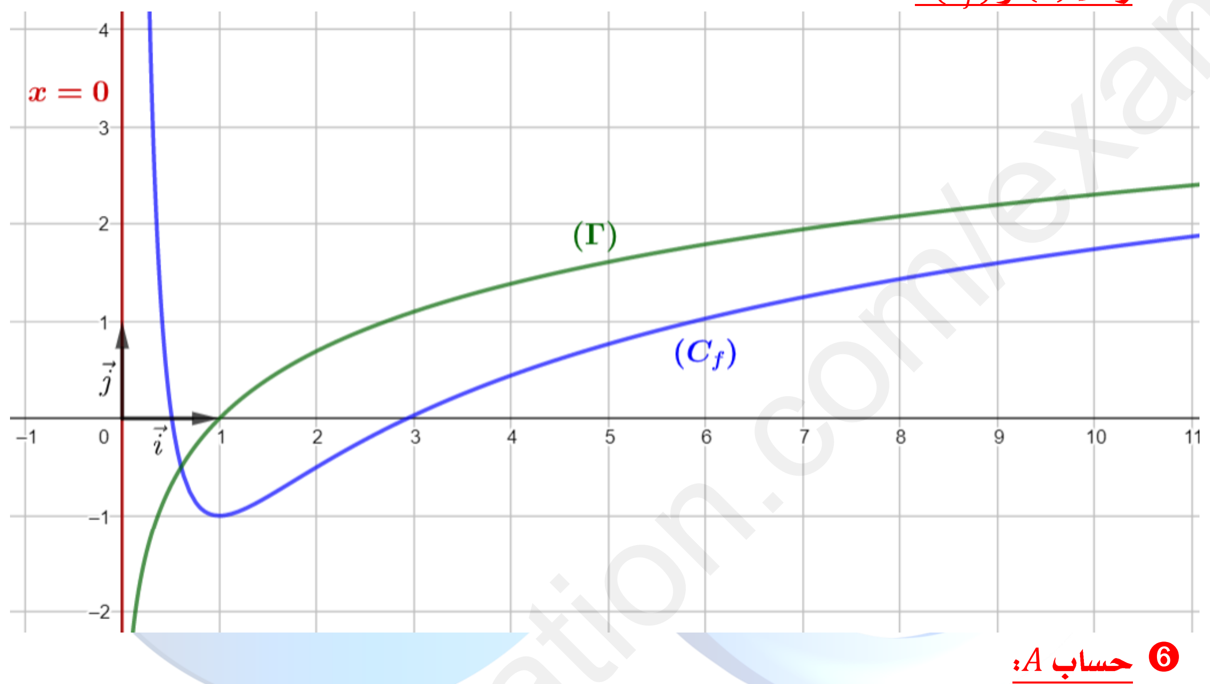
• **لدينا:** $f(0.6) \times f(0.5) < 0$ **لأن:** $f(0.6) \approx -0.47$ و $f(0.5) \approx 0.08$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.5; 0.6[$

• **ولدينا:** $f(2.9) \times f(3) < 0$ **لأن:** $f(3) \approx 0.03$ و $f(2.9) \approx -0.01$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]2.9; 3[$

[01ن] ❺ **رسم (Γ) و (C_f) :**



[01ن] ❻ **حساب A:**

$$A = \int_1^e (\ln x - f(x))dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x}\ln x\right)dx = \left[\ln x + 2\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$$

$$= [\ln x + (\ln x)^2]_1^e = \boxed{2}cm^2$$



بالتوفيق في شهادة البكالوريا

❤ **لا تنسونا من صالح دعائكم** ❤

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل



الموضوع الثاني

◆ التمرين الأول: (03 نقاط)

[1.5ن] I) **تعيين a، b و c**

من البيان نجد:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

• لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \big((ax+b)e^{-x} + c\big) = 1 \Longrightarrow \boxed{c = 1}$$

•ولدينا:

$$f(0) = 0 \Longrightarrow (a(0)+b)e^{-(0)} + c = 2 \Longrightarrow b + c = 2 \Longrightarrow \boxed{b = 1}$$

• ولدينا:

$$f'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} = (a - b - ax)e^{-x}$$

ومنه:

$$f'(0) = 0 \Longrightarrow \big(a - b - a(0)\big)e^{-(0)} = 0 \Longrightarrow a - b = 0 \Longrightarrow a = b \Longrightarrow \boxed{a = 1}$$

II)

[01ن] ❶ **تعيين دالة أصلية للدالة f:**

نسمي: $g(x) = (x+1)e^{-x}$

نضع: $u(x) = t + 1$ و $v'(t) = e^{-t}$

ومنه: $u'(t) = 1$ و $v(t) = -e^{-t}$

إذن:

$$G(x) = \int_{-1}^{x} (t+1)e^{-t}dt = [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} -e^{-t}dt$$

$$= [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^{x} - [e^{-t}]_{-1}^{x} = [-(t+2)e^{-t}]_{-1}^{x} = \boxed{-(x+2)e^{-x} + e}$$

[0.5ن] ❷ **تبيين أن $A = e - 2$**

$$A = \int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \big((x+1)e^{-x} + 1\big)dx = \int_{-1}^{0} (x+1)e^{-x}dx + \int_{-1}^{0} dx$$

$$= [-(x+2)e^{-x}]_{-1}^{0} + [x]_{-1}^{0} = [-(x+2)e^{-x} + x]_{-1}^{0}$$

$$= \boxed{(e-1)}\, cm^2$$

◆ التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

[01ن] ❶ **حساب احتمال الحوادث A و B:**

$$p(A) = \frac{A_3^2 + A_4^2 + A_2^2}{A_9^2} = \boxed{\frac{20}{72}} = \frac{5}{18}$$

$$p(B) = \frac{A_4^1 A_8^1}{A_9^2} = \boxed{\frac{32}{72}} = \frac{4}{9}$$

[0.5ن] ❷ **استنتاج احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين:**

$$p(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{20}{72} = \boxed{\frac{52}{72}} = \frac{13}{18}$$

[0.5ن] ❸ حساب احتمال سحب كرتان من نفس اللون علما أنّ الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء:

$$p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{A_4^2}{A_9^2}}{\frac{32}{72}} = \frac{\frac{12}{72}}{\frac{32}{72}} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

❹

[1.5ن] أ/ تعيين قيم المتغير العشوائي X، وكتابة قانون احتماله:

لدينا: $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ حيث:

$$p(X=0) = \frac{A_5^2}{A_9^2} = \boxed{\frac{20}{72}} = \frac{5}{18}$$

$$p(X=1) = \frac{2A_4^1A_5^1}{A_9^2} = \boxed{\frac{40}{72}} = \frac{5}{9}$$

$$p(X=2) = \frac{A_4^2}{A_9^2} = \boxed{\frac{12}{72}} = \frac{1}{6}$$

ومنه:

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{20}{72}$	$\frac{40}{72}$	$\frac{12}{72}$

[0.5ن] ب/ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X) = 0\frac{20}{72} + 1\frac{40}{72} + 2\frac{12}{72} = \frac{8}{9}$$

[0.5ن] • حساب $E(1443X+2022)$:

$$E(1443X+2022) = 1443E(X) + 2022 = \boxed{\frac{9914}{3}}$$

◆ التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I

[0.5ن] ❶ دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1)-2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} > 0$$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

x	1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	1 ↗ $+\infty$

[0.25ن] ❷ تبيين أنه من أجل كل $x \geq 1$ فإنّ: $f(x) \geq 1$:

من جدول تغيرات الدالة f نجد أنّ $f(x) \geq 1$

(II

[0.5ن] ❶ برهان بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فإنّ: $u_n \geq 1$:

نسمي $P(n)$ ... $u_n \geq 1$

• لدينا: $u_0 \geq 1$ ومنه: $2 \geq 1$ إذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

• نفرض أن $u_n \geq 1$ ونثبت صحة $u_{n+1} \geq 1$

• لدينا: $u_n \geq 1$

وبما أنّ الدالة f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ فإنّ:

$$u_n \geq 1 \Rightarrow f(u_n) \geq f(1) \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$$

حسب البرهان بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

[0.5ن] ❷ تبيين أنّ (u_n) متناقصة تماما، واستنتاج أنها متقاربة:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{-(u_n)^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1}$$

لدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $1 - u_n \leq 0$

ولدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $2u_n - 1 \geq 1$

إذن:

$$\frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1} < 0$$

وعليه (u_n) متناقصة تماما

• وبما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة

❸

[0.5ن] أ/ تبيين أن (w_n) هندسية أساسها 2 وحساب w_0:

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1}}\right) = \ln\left(\frac{(u_n)^2 - 2u_n + 1}{(u_n)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(u_n - 1)^2}{(u_n)^2}\right) = 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = 2\ln(v_n) = 2w_n$$

ولدينا: $w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

إذن (v_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $-\ln 2$

[0.5ن] ب/ كتابة بدلالة n عبارة w_n :

$$w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times (2)^n = \boxed{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)}$$

[0.5ن] • استنتاج بدلالة n عبارة v_n:

$$w_n = \ln(v_n) \Rightarrow e^{w_n} = v_n \Rightarrow v_n = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)} \Rightarrow \boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

[0.5ن] ❹ استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \Rightarrow v_n u_n = u_n - 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 - v_n} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}}$$

[0.5ن] • حساب نهاية (u_n):

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}\right) = \boxed{1}$$

لأن: $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)=0$ ، $\left(-1<\frac{1}{2}<1\right)$

❺

[0.5ن] أ/ كتابة بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) = \boxed{\ln(2)\left(1-2^{n+1}\right)}$$

[0.25ن] ب/ كتابة بدلالة n الجداء P_n :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = e^{w_0}\times e^{w_1}\times \dots \times e^{w_n} = e^{w_0+w_1+\cdots+w_n} = e^{S_n} = e^{\ln(2)(1-2^{n+1})}$$
$$= \boxed{2^{(1-2^{n+1})}}$$

◆ التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

I)

[01ن] ❶ دراسة اتجاه تغير الدالة g ، وتشكيل جدول تغيراتها:

- النهايات:

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}e^2 - xe^{-x}e^2 + 1\right) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

- المشتقة:

$$g'(x) = -e^{2-x} - (1-x)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$$

لدينا: $e^{2-x} > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-2$:

$$x-2=0 \Longrightarrow x=2$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ 1

[0.5ن] ❷ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ $g(x)\geq 0$:

من جدول تغيرات الدالة g نجد أنّ $g(x)\geq 0$ (لأنّ الدالة g تبلغ قيمة حدية دنيا موجبة)

II)

[0.5ن] ❶ حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-2-(-x)e^{-x}e^2\right) = \boxed{+\infty}$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

[0.5ن] ❷ أ/ حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim_{x\to+\infty}\left[xe^{2-x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[-(-x)e^{-x}e^2\right] = 0$$

• نستنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y=x+2$

[0.5ن] ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

$$f(x)-(x+2) = xe^{2-x}$$

لدينا: $e^{2-x}>0$ إذن إشارة الفرق من إشارة x:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

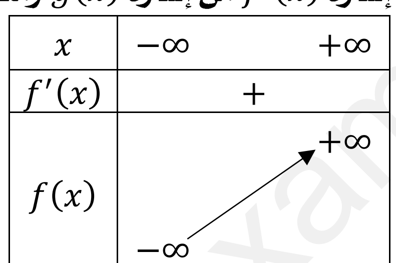
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; 0[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x = 0$
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; +\infty[$

❸ أ/ تبيين أنه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = g(x)$: [0.5ن]

$$f'(x) = 1 + e^{2-x} - xe^{2-x} = (1-x)e^{2-x} + 1 = g(x)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها: [0.5ن]

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه:



x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

❹ تبيين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.31; 0.32[$: [0.5ن]

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $f(0.31) \times f(0.32) < 0$ لأنّ: $f(0.31) \approx -0.01$ و $f(0.32) \approx 0.04$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.31; 0.32[$

❺ تبيين (C_f) يقبل نقطة إنعطاف : [0.5ن]

لدينا: $f'(x) = g(x)$

ومنه: $f''(x) = g'(x)$

إذن إشارة $f''(x)$ من إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

المشتقة الثانية تنعدم عند $x = 2$ وتغير إشارتها

إذن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف $\Omega(2; f(2))$ أي: $\boxed{\Omega(2; 2)}$

❻ تبيين أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) : [0.5ن]

$$f'(a) = 1 \Rightarrow (1-a)e^{2-a} + 1 = 1 \Rightarrow (1-a)e^{2-a} = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

إذن (C_f) يقبل مماسا موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$

- كتابة معادلة (T): [0.5ن]

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = \boxed{x + e - 2}$$

❼ رسم (T)، (Δ) و (C_f): [01ن]



[0.5ن]

❽ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلات

$$y_m = x + m$$

وهي:

لما $m < -2$ **المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا تماما**

لما $m = -2$ **المعادلة تقبل حلا معدوما**

لما $-2 < m < e - 2$ **المعادلة تقبل حلين موجبين**

لما $m = e - 2$ **المعادلة تقبل حلا وحيدا قيمته** $x = 1$

لما $m > e - 2$ **المعادلة لا تقبل حلولا**

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

❤ لا تنسونا من صالح دعائكم ❤

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سطيف
المستوى: الثالثة ثانوي
الشعب:علوم تجريبية - تقني رياضي

الأستاذ : عجيسي نواري
دورة : جـــوان 2022
التاريخ: 05 جوان 2022

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة: الرياضيات — المدة: 3سا(ع.ت) 4سا (ت.ر)

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط) (خاص بشعبة علوم تجريبية)

لدينا 3 صناديق U_1,U_2,U_3 يحتوي الصندوق U_1 على كرة حمراء واحدة و 9 كرات سوداء، الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و 8 كرات سوداء، أما الصندوق U_3 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و 7 كرات سوداء .

نختار عشوائيا صندوقا من الصناديق الثلاثة و نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق المختار

لتكن الأحداث : RR " الحصول على كرتين حمراوين " و NN : "الحصول على كرتين سوداوين " ,

و NR " الحصول على كرتين مختلفتين في اللون "

1) انقل ثم اتمم شجرة الاحتمالات

2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ) حدد قيم المتغير العشوائي X , ثم بين أن $p(X=2)=\dfrac{4}{135}$

ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X , ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

3) علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_3

التمرين الأول : (04 نقاط) (خاص بشعبة تقني رياضي)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $11x-5y=2$

أ) اثبت انه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن : $y\equiv 4[11]$

ب) استنتج حلول المعادلة (E)

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع $a=5n+2$ و $b=11n+4$

أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

ب) عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون : $PGCD(a;b)=2$

ج) استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$

أ) بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب) استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين الثاني: (05 نقاط)

لتكن المعادلة التفاضلية $y'-3y=0$.......(1)

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (1) ثم عين الحل الخاص f الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x=\frac{-2}{3}$

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام : $u_n=e^{3n+2}$

أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، هل هي متقاربة ؟

ب) ادرس اتجاه تغير (u_n)

3) نعرف المتتالية (v_n) بما يلي : $v_n=\ln(u_n)$

أ) بين أن (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

ب) اثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ج) احسب المجموع : $S_n=v_0+v_1+.....+v_{n-1}$ ثم الجداء $T_n=u_0\times u_1\times.......\times u_{n-1}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات التالية لكل سؤال جواب واحد صحيح حدده مع التعليل

1) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=3x+\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته :

أ) $y=3x$ ب) $y=3x+1$ ج) $y=3x+2$

2) نعتبر العدد الحقيقي $A(\lambda)=\int_1^{\lambda} x\ln x dx$ حيث $\lambda>1$: علما أن الدالة $x\mapsto\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{1}{2}\right]$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto x\ln x$, قيمة λ التي من أجلها $A(\lambda)=\frac{1}{4}$ هي :

أ) $\lambda=e^{-1}$ ب) $\lambda=\sqrt{e}$ ج) $\lambda=2e$

3) المعادلة $\log(11x^2-6x+5)=\log(x^2)+1$ تقبل حلان في $\mathbb{R}$ هما :

أ) $S=\{1;-5\}$ ب) $S=\{1;5\}$ ج) $S=\{-1;-5\}$

4) المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n=2-3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ هي متتالية

أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما ج) ليست رتيبة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i};\vec{j})$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x, $f'(x)=1+(x-1)^2 e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (Cf) بالنسبة إلى (Δ)

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث، $1{,}8<\alpha<1{,}9$

4) اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x, $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6) احسب : $f(3), f(0)$ ثم ارسم $(\Delta),(T)$ و (C_f)

7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x)=x+m$

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$

1) أ) بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$

ب) احسب I_1

2) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n

ب) احسب I_2 .

3) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط) (خاص بشعبة علوم تجريبية)

يحتوي صندوق U_1 على ست كرات منها ثلاثة كرات حمراء وكرتين لونهما أبيض وكرة لونها أخضر، ويحتوي صندوق U_2 على أربع كرات منها كرتين خضراوين وكرتين لونهما أبيض . الكرات في صندوقين كلها متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

نقوم بإجراء عملية السحب العشوائي الاتية: نسحب عشوائيا وفي ان واحد كرتين من الصندوق U_1 ونضعهما في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من الصندوق U_2



نعتبر الحدثين التاليين :

A: " سحب ثلاث كرات من نفس اللون "

B: " سحب ثلاث كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى "

1) أ) بين أن : $P(A)=\frac{17}{300}$

ب) أحسب: $P(B)$

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان التي تظهر بعد نهاية عملية السحب العشوائي

أ) أوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

ب) أوجد قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضياتي

3) أحسب احتمال سحب ثلاث كرات من نفس اللون من U_2 علما أن الكرتين المسحوبتين من U_1 من نفس اللون

التمرين الأول : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 5x-6y=3$

1) أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعفا للعدد 3

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ج) استنتج حلول للجملة (S) : $\begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$

2) a و b عددان طبيعيان حيث:

$a=\overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5

عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E)

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n\leq n+3$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج) استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل. هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة؟

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n=u_n-n$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها

ب) عبرعن v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب نهاية (u_n) عند $+\infty$

ج) أحسب بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

4) لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $t_n=\ln(v_n)$

أ) برهن أن المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب)أحسب بدلالة n المجموع : $A_n=t_0+t_1+t_2+...+t_n$

ج)استنتج بدلالة n الجداء: $P_n=v_0\times v_1\times v_2\times...\times v_n$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) حل المعادلة التفاضلية $y''=-e^x+2$ والذي يحقق الشرطان $y(0)=1\,;\,y'(0)=1$ هو :

أ) $y=x^2-e^x+2x+2$ ب) $y=2e^x-x$ ج) $y=-2x+e^x$

2) يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا له من بين ثلاث رجال $H_1;H_2;H_3$ وأربع نساء $F_1;F_2;F_3;F_4$

احتمال أن هو H_1 الرئيس

أ) $\frac{6}{7}$ ب) $\frac{1}{7}$ ج) $\frac{4}{42}$

3) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=3x^2-\frac{1}{x+1}$:

القيمة المتوسطة m للدالة f على المجال $[0;2]$ هي

أ) $m=4-\ln\sqrt{3}$ ب) $m=4+\ln\sqrt{3}$ ج) $m=2-\ln\sqrt{3}$

4) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n=\int_0^1(1+x^n)dx$:

أ) (u_n) متتالية متناقصة ب) (u_n) متتالية متزايدة ج) (u_n) متتالية غير رتيبة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومجانس $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln(x)$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ ، $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g

2) أدرس إشارة $g(x)$ (لاحظ أن: $g(1)=0$)

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$ وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ ثم احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4) انشئ المنحنى (C)

5) بين أن الدالة $h:x\to x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\to\ln x$ على $]0;+\infty[$ ثم باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن: $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$

6) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سطيف

المستوى: الثالثة ثانوي

الشعب: علوم تجريبية - تقني رياضي



الأستـاذ : عجيسـي نـواري

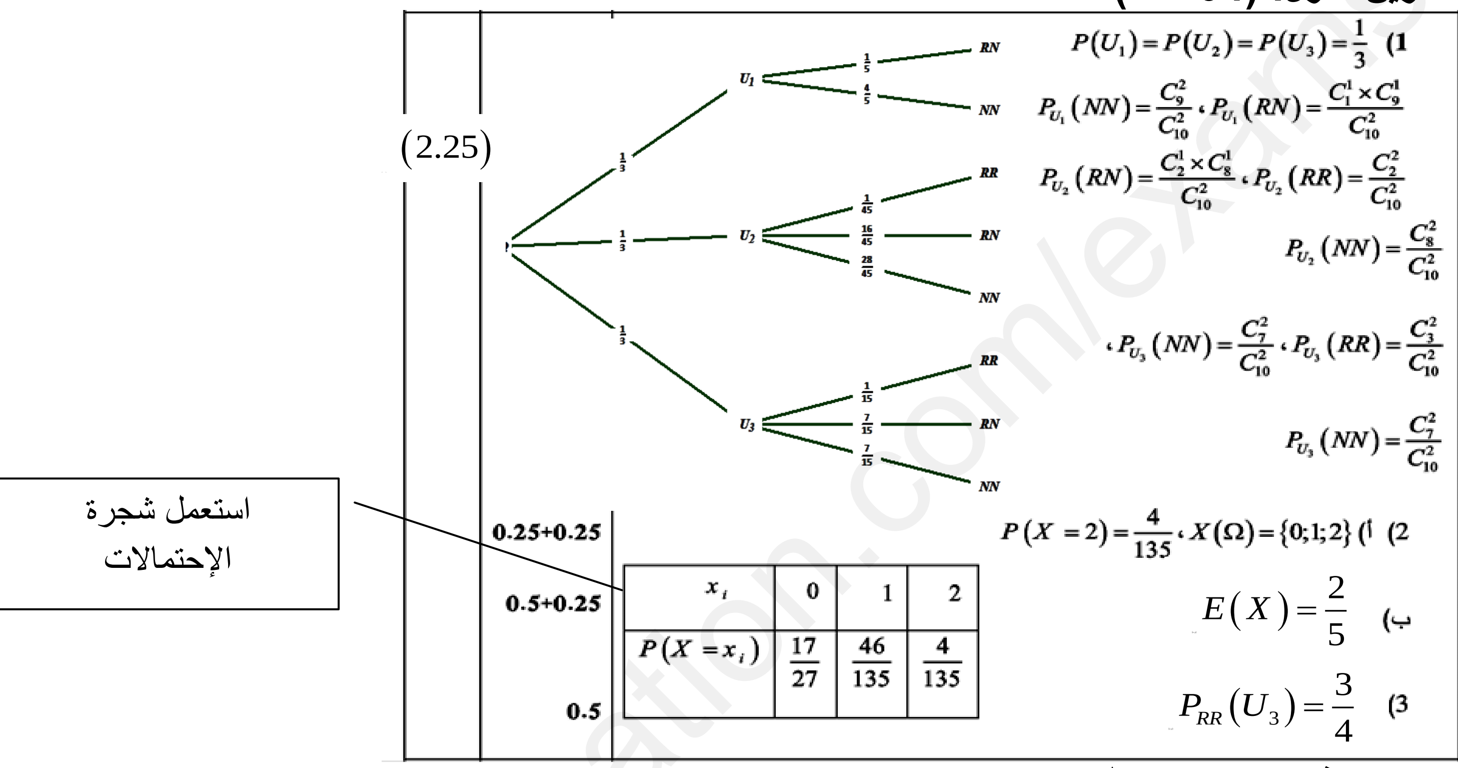
دورة : جـــــوان 2022

التاريخ: 05 جـوان 2022

التصحيح المفصل لامتحان البكالوريا التجريبي في مادة: الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)



(2.25)

1) $P(U_1)=P(U_2)=P(U_3)=\frac{1}{3}$

$P_{U_1}(NN)=\frac{C_9^2}{C_{10}^2}$ ، $P_{U_1}(RN)=\frac{C_1^1\times C_9^1}{C_{10}^2}$

$P_{U_2}(RN)=\frac{C_2^1\times C_8^1}{C_{10}^2}$ ، $P_{U_2}(RR)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}$

$P_{U_2}(NN)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}$

، $P_{U_3}(NN)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}$ ، $P_{U_3}(RR)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}$

$P_{U_3}(NN)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}$

استعمل شجرة الإحتمالات

2) أ) $X(\Omega)=\{0;1;2\}$ ، $P(X=2)=\frac{4}{135}$ — 0.25+0.25

ب) $E(X)=\frac{2}{5}$ — 0.5+0.25

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{17}{27}$	$\frac{46}{135}$	$\frac{4}{135}$

3) $P_{RR}(U_3)=\frac{3}{4}$ — 0.5

التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

1)أ*/إثبات أن: $y\equiv 4[11]$ ، $(E)...11x-5y=2$

$11x-5y=2$ يكافئ $5y=11x+2$ ومنه $5y\equiv -2[11]$ أي

أي $5y\equiv 20[11]$ ومنه : $y\equiv 4[11]$ (0.5)

ب*/استنتاج حلول المعادلة (E):

$y\equiv 4[11]$ معناه $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$، نعوض قيمة y في المعادلة (E) نجد: $x=5k+2$ (0.5)

ومنه: $S=\{(11k+4;5k+5)/k\in\mathbb{Z}\}$

2)أ*/تعيين القيم الممكنة لـ $d=PGCD(a;b)$:

$a=5n+2$ و $b=11n+4$ ، $n\in\mathbb{N}^*$ (0.5)

$11a-5b=11(5n+2)-5(11n+4)=55n+22-55n-20=2$

ومنه : $d/2$ إذن : $d\in D_2=\{1;2\}$.

ب*/تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$ لدينا $PGCD(a;b)=2$

معناه 2 يقسم a و2 يقسم b معناه 2 يقسم $b-2a$ (0.5)

أي 2 يقسم $11n+4-2(5n+2)$ وبالتالي 2 يقسم n .

ومنه n عدد زوجي يكتب من الشكل: $n=2\alpha\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$

ج*/ استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق (0.5)

من أجل $PGCD(a;b)=2$ قيم n : $n=2\alpha\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$

ومنه : قيم n حيث $PGCD(a;b)=1$ هي : $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

3) أ*/نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

$A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$ ، $n\in\mathbb{N}$ (0.5)

$A=(n+1)(5n+2)=a(n+1)$ ، $B=(n+1)(11n+4)=b(n+1)$

ومنه : $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب*/ استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B:

$PGCD(A;B)=PGCD(a(n+1);b(n+1))=(n+1)PGCD(a;b)$ (0.5)

ومنه نميز حالتين :

الحالة 1: إذا كان $PGCD(a;b)=2$ معناه $n=2\alpha/\alpha\in\mathbb{N}^*$

نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1)2=4\alpha+2$ (0.5)

الحالة 2: إذا كان $PGCD(a;b)=1$ معناه $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1+1)1=2\alpha+2$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الإجابة	العلامة
لدينا: $(1): y' - 3y = 0$	
1) حل المعادلة التفاضلية (1): - لدينا: $y' - 3y = 0$ يكافئ $y' = 3y$ حلول المعادلة هي الدوال f ' ¥¢‹ : $f(x) = ce^{3x}$ حيث $c \in \mathbb{R}$	0.5
- **تعيين الحل الخاص f الذي يحقق $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$:** $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$ يعني $ce^{3\left(-\frac{2}{3}\right)} = 1$ ومنه $ce^{-2} = 1$ ¤ $c = e^2$ ومنه $f(x) = e^2 \times e^{3x} = e^{3x+2}$	0.25
2) لدينا: $u_n = e^{3n+2}$	
(تبيان أن المتتالية (u_n) هندسية: - لدينا: $u_{n+1} = e^{3(n+1)+2} = e^{3n+3+2} = e^3 \times e^{3n+2} = e^3 \times u_n$ **ومنه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = e^3$ وحدها الأول $u_0 = e^2$**	0.5 + 0.25 + 0.25
- **تقارب المتتالية (u_n):** (u_n) هندسية أساسها $q = e^3$¤ $q > 1$ ومنه (u_n) متباعدة	0.25
لدينا: $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{3n+2} = +\infty$	
•) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n): - لدينا: $u_{n+1} - u_n = e^{3n+5} - e^{3n+2} = (e^3 - 1)e^{3n+2}$ ¤ $e^3 - 1 > 0$ » $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما .	0.5
3) لدينا: $v_n = \ln(u_n)$	
(**تبيان أن المتتالية (v_n) ' $\mathbb{N}$:** من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n > 0$ ومنه المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n. **ولدينا:** $v_n = \ln e^{3n+2} = 3n + 2$	0.5
•) تبيان أن المتتالية (v_n) حسابية: - لدينا: $v_{n+1} - v_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3$ ومنه (v_n) حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول $v_0 = 2$	0.25+0.5 0.25+
¡) « • ¢ S_n: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = \frac{n}{2}(v_0 + v_{n-1}) = \frac{n}{2}(2 + 3(n-1) + 2)$ ¤ $S_n = \frac{n}{2}(3n+1)$	0.5
- « • ¢ f $T_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$: $T_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1} = e^{v_0} \times e^{v_1} \times ... \times e^{v_{n-1}} = e^{v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}}$ $T_n = e^{\frac{n}{2}(3n+1)}$	0.5

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الاقتراح	الجواب	التبرير	التنقيط
1	الإجابة (ج) $y=3x+2$	$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(3x+2)]=0$	2×0.5
2	الإجابة (ب) $\lambda=\sqrt{e}$	$A(\lambda)=\int_1^\lambda x\ln x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_1^\lambda=\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$ $A(\lambda)=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)=0$ ومنه $\lambda=\sqrt{e}$ أو $\lambda=0$ مرفوض لأن : $(\lambda>1)$	2×0.5
3	الإجابة (ب) $S=\{1,5\}$	$\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$ $\frac{\ln(11x^2-6x+5)}{\ln10}=\frac{\ln x^2}{\ln10}+1$ $x^2-6x+5=0$ $x=1,x=5$	2×0.5
4	الإجابة (أ) متزايدة تماما	$u_{n+1}-u_n=\left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)-\left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+3\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n>0$	2×0.5

التمرين الرابع: (07 نقاط)

.I لدينا : $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$

(1 أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=-\infty$ لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-(x^2+1)e^{-x+1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\end{cases}$ — 0.25

• تبيان أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2+1}{e\times e^x}\right)$ — 0.25

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2}{e^x}\times\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\times\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\end{cases}$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$:

• لدينا : $f'(x)=1-\left[2xe^{-x+1}+(x^2+1)(-e^{-x+1})\right]=1-(2x-x^2-1)e^{-x+1}$

وبالتالي : $f'(x)=1+(x^2-2x+1)e^{-x+1}=1+(x-1)^2e^{-x+1}$ — 0.5

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f : — 0.25

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$(x-1)^2e^{-x+1}$	+
$f'(x)$	+

- **جدول التغيرات :**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0.5

2) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left(x-(x^2+1)e^{-x+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^{2}e^{-x+1}+e^{-x+1}\right)=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$

0.25

- **دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):**

لدينا : $f(x)-x = x-(x^2+1)e^{-x+1}-x = -(x^2+1)e^{-x+1}$

إذن $f(x)-x<0$ ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل عدد حقيقي x

0.5

3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:

- **لدينا** f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.8;1.9]$

ولدينا $f(1.8)=1.8-((1.8)^2+1)e^{-1.8+1}=-0.11$

$f(1.9)=1.9-((1.9)^2+1)e^{-1.9+1}=0.03$ وبالتالي $f(1.8)\times f(1.9)<0$

حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$.

0.5

4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=1\times(x-1)-1=x-2$ أي $(T): y=x-2$

0.5

5) تبيان أنّ $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$:

- لدينا : $f''(x)=2(x-1)e^{-x+1}+(x-1)^2\times\left(-e^{-x+1}\right)=(x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$

أي $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$.

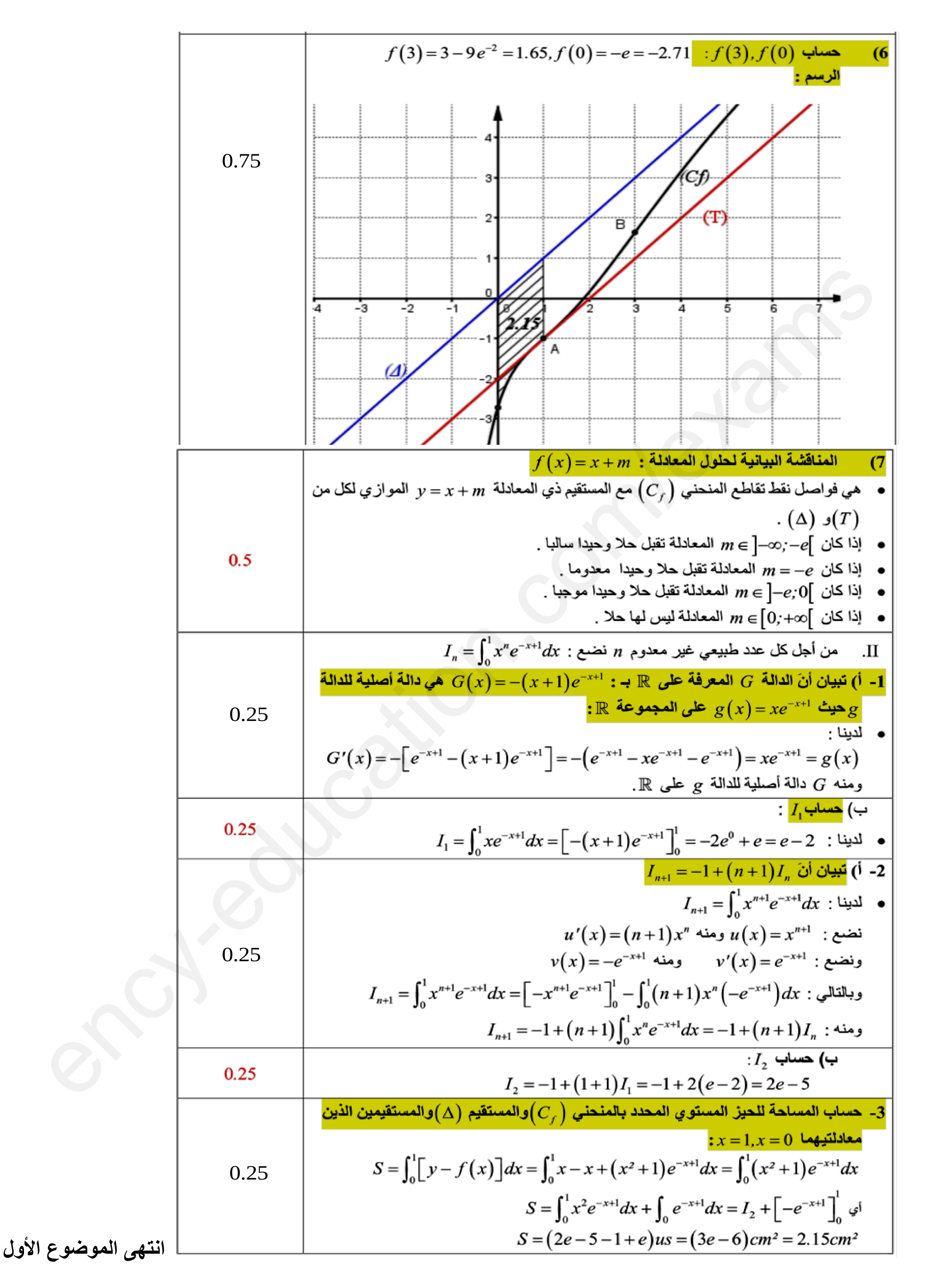
- **استنتاج أنّ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :**

- جدول إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

- **المشتقة الثانية** $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمتين $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها إذن النقطتين $A(1;f(1)), B(3;f(3))$ نقطتي انعطاف للمنحني (C_f)

01



6) حساب $f(3), f(0)$: $f(3)=3-9e^{-2}=1.65, f(0)=-e=-2.71$

الرسم :

0.75

7) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x)=x+m$

- هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من (T) و (Δ) .
- إذا كان $m\in\left]-\infty;-e\right[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $m=-e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما .
- إذا كان $m\in\left]-e;0\right[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .
- إذا كان $m\in\left[0;+\infty\right[$ المعادلة ليس لها حلا .

0.5

II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$

1- أ) تبيان أنَ الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث $g(x)=xe^{-x+1}$ على المجموعة $\mathbb{R}$:

- لدينا :

$$G'(x)=-\left[e^{-x+1}-(x+1)e^{-x+1}\right]=-\left(e^{-x+1}-xe^{-x+1}-e^{-x+1}\right)=xe^{-x+1}=g(x)$$

ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

0.25

ب) حساب I_1 :

- لدينا : $I_1=\int_0^1 xe^{-x+1}dx=\left[-(x+1)e^{-x+1}\right]_0^1=-2e^0+e=e-2$

0.25

2- أ) تبيان أنَ $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$

- لدينا : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx$

نضع : $u(x)=x^{n+1}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^n$

ونضع : $v'(x)=e^{-x+1}$ ومنه $v(x)=-e^{-x+1}$

وبالتالي : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x+1}\right]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n\left(-e^{-x+1}\right)dx$

ومنه : $I_{n+1}=-1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx=-1+(n+1)I_n$

0.25

ب) حساب I_2:

$I_2=-1+(1+1)I_1=-1+2(e-2)=2e-5$

0.25

3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=1, x=0$:

$$S=\int_0^1\left[y-f(x)\right]dx=\int_0^1 x-x+(x^2+1)e^{-x+1}dx=\int_0^1(x^2+1)e^{-x+1}dx$$

أي $S=\int_0^1 x^2e^{-x+1}dx+\int_0 e^{-x+1}dx=I_2+\left[-e^{-x+1}\right]_0^1$

$S=(2e-5-1+e)us=(3e-6)cm^2=2.15cm^2$

0.25

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) أ) تبيين أن : $p(A)=\dfrac{17}{300}$

$$p(A)=\left(\frac{C_2^2}{C_6^2}\times\frac{C_4^3}{C_6^3}\right)+\left(\frac{C_1^1C_2^1}{C_6^2}\times\frac{C_3^3+C_3^3}{C_6^3}\right)+\left(\frac{C_3^1C_1^1}{C_6^2}\times\frac{C_3^3}{C_6^3}\right)+\left(\frac{C_3^1C_2^1}{C_6^2}\times\frac{C_3^3}{C_6^3}\right)=\frac{17}{300}$$ (0.5)..............

ب) حساب $p(B)$:

$$p(B)=\left(\frac{C_3^2}{C_6^2}\times\frac{C_2^1C_2^1C_2^1}{C_6^3}\right)+\left(\frac{C_3^1C_1^1}{C_6^2}\times\frac{C_3^1C_2^1C_1^1}{C_6^3}\right)+\left(\frac{C_3^1C_2^1}{C_6^2}\times\frac{C_3^1C_2^1C_1^1}{C_6^3}\right)=\frac{13}{50}$$ (0.5)..............

2) أ) تحديد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي : $\{1;2;3\}$ (0.25)..............

$P(X=2)=1-\left(P(X=1)+P(X=3)\right)$; $P(X=3)=P(B)$; $P(X=1)=P(A)$

X	1	2	3
$P(X)$	$\dfrac{17}{300}$	$\dfrac{205}{300}$	$\dfrac{78}{300}$

(1.5)..............

ب)الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X هو : $E(X)=\dfrac{661}{300}$ (0.5)..............

1) حساب احتمال سحب ثلاث كرات من نفس اللون من U_2 علما أن الكرتين المسحوبتين من U_1من نفس اللون

نسمي C:" سحب كرتين من U_1من نفس اللون " ، D:" سحب ثلاث كرات من نفس اللون من U_2 "

$$P_C(D)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{\dfrac{C_2^2}{C_6^2}\times\dfrac{C_4^3}{C_6^3}}{\dfrac{C_3^2+C_2^2}{C_6^2}}=\frac{1}{20}$$ (0.75)..............

التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

$(E):5x-6y=3$:ا **1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3:** • لدينا : $5x-6y=3$ تكافئ $5x=3+6y$ أي $5x=3(1+2y)$ • لدينا : $3/5x$ و $3\wedge5=1$ فإن $3/x$ حسب مبرهنة غوص أي x مضاعف للعدد 3	(0.5)
ب) تعيين حل خاص للمعادلة (E) : • نفرض $x=3$ وبالتالي : $y=\dfrac{5\times3-3}{6}=\dfrac{12}{6}=2$ أي الثنائية $(3;2)$حل للمعادلة (E)	0.5

$\dfrac{13}{50}$

(0.75)	• حل المعادلة (E): لدينا : $5x-6y=5\times3-6\times2$ يكافئ $5x-5\times3=6y-6\times2$ أي $(*) : 5(x-3)=6(y-2)$ • لدينا : $6/5(x-3)$ و $6\wedge5=1$ فإن $6/(x-3)$ حسب مبرهنة غوص . أي $x-3=6k(k\in\mathbb{Z})$ وبالتالي $x=6k+3(k\in\mathbb{Z})$ • من أجل $x=6k+3$ نعوض في المعادلة $(*)$ نجد : $5(6k+3-3)=6(y-2)$ ومنه $y-2=5k(k\in\mathbb{Z})$ أي $y=5k+2(k\in\mathbb{Z})$ - مجموعة حلول المعادلة : $S=\{(6k+3;5k+2),k\in\mathbb{Z}\}$
0.75	ج) استنتاج حلول الجملة : $(S):\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$ • $\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=6m-1\\x=5n-4\end{cases}$ أي $6m-1=5n-4$ ومنه $5n-6m=3$ ومنه : $n=6k+3$ وبالتالي $x=5(6k+3)-4=30k+11(k\in\mathbb{Z})$
0.75 0.75	2- لدينا : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}^3$ و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}^5$ • تعيين $(\alpha;\beta)$ بحيث تكون $(a;b)$ حل للمعادلة (E): - لدينا : $a=1\times3^5+\alpha\times3^4+\alpha\times3^2=243+81\alpha+9\alpha=243+90\alpha$ ولدينا : $b=\alpha\times5^3+\beta\times5^2+\alpha\times5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$ مع $\alpha\le2$ و $\beta\le4$ • الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a-6b=3$ ومنه $5(243+90\alpha)-6(126\alpha+25\beta)=3$ أي $1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ ومنه $-306\alpha-150\beta=-1212$ بعد تقسيم الطرفين على العدد -3 نجد : $102\alpha+50\beta=404$ وبالتالي $(\alpha;\beta)=(2;4)$ حل للمعادلة

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1- حساب الحدود u_1، u_2، u_3 : ....(0.75)

$u_1=\frac{7}{3}$ ، $u_2=\frac{26}{9}$ ، $u_3=\frac{97}{27}$

• تخمين حول اتجاه تغيرات المتتالية (u_n): متتالية متزايدة ....(0.25)

2- أ- البرهان بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n\le n+3$

لتكن فرضية التراجع $P(n):u_n\le n+3$

* المرحلة 1: الخاصية $P(0)$ صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0=2$ أي $P(n):u_0\le3$

* المرحلة 2: نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n حيث $n\ge0$ أي $u_n\le n+3$ و

نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}\le n+1+3$ أي $u_{n+1}\le n+4$ ....(0.5)

لدينا $u_n\le n+3$ و منه $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\le\frac{2}{3}n+3\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n+1$ و بالتالي $u_{n+1}\le n+3$

ولدينا $n+3\le n+4$ و منه $u_{n+1}\le n+4$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

* الخلاصة: نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

إذن $u_n\le n+3$.

ب- دراسة اتجاه تغيرات المتتالية (u_n):

(0.5)..............

$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$ و لدينا $u_n\le n+3$ أي

$-\frac{1}{3}u_n\ge-\frac{1}{3}n-1$ و منه $-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\ge0$ و بالتالي $u_{n+1}-u_n\ge0$ و منه متزايدة

ج- استنتاج أن (u_n) **محدودة من الأسفل .هل يمكن القول أن** (u_n) **متقاربة :**

(0.25)..............

لدينا (u_n) متزايدة معناه $u_n\ge u_0$ أي $u_n\ge2$ نستنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

لا يمكن القول أن (u_n) متقاربة : لأنها متزايدة و ليست محدودة من الأعلى

3- نعتبر المتتالية (v_n) **المعرفة على** $\mathbb{N}$ **بالعلاقة** $v_n=u_n-n$.

أ- برهن أنّ المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأوّل وأساسها:

(0.5)..............

(v_n) **هي متتالية هندسية معناه** $v_{n+1}=v_n\times q$

لدينا $v_n=u_n-n$ و منه $v_{n+1}=u_{n+1}-n-1$ و بالتالي $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1$

أي $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n=\frac{2}{3}(u_n-n)$ و منه $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ وبالتالي :

(v_n) هي متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و حدّها الأوّل $v_0=u_0-0=2$

ب- التعبير عن v_n **ثمّ** u_n **بدلالة** n **ثم حساب نهاية** (u_n) **عند** $+\infty$

(0.5)..............

$v_n=v_0\times q^n$ أي $v_n=2\times(\frac{2}{3})^n$ ، $u_n=v_n+n$ و منه $u_n=2\times(\frac{2}{3})^n+n$: $\lim u_n=+\infty$

ج- حساب بدلالة n **المجموع** $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$

$$S_n=(v_0+1)+(v_1+1)+\ldots+(v_n+n)=v_0+v_1+\ldots+v_n+1+2+\ldots n$$

(0.5)..............

$$=2\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}+n(n+1)=6(1-(\frac{2}{3})^{n+1})+n(n+1)$$

4- لتكن المتتالية (t_n) **المعرفة على** $\mathbb{N}$ **بالعلاقة** $t_n=\ln(v_n)$

أ- البرهان أنّ المتتالية (t_n) **حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأوّل:** (t_n) حسابية معناه $t_{n+1}=t_n+r$

لدينا $t_n=\ln(v_n)$ و منه $t_{n+1}=\ln(v_{n+1})$ أي $t_{n+1}=\ln(\frac{2}{3}v_n)=\ln(v_n)+\ln(\frac{2}{3})$

(0.5)..............

لأنّ $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ و منه $t_{n+1}=t_n+\ln(\frac{2}{3})$ و منه (t_n) حسابية أساسها $r=\ln(\frac{2}{3})$ و وحدها

الأوّل $t_0=\ln(v_0)=\ln(2)$

ب- حساب بدلالة n **المجموع** $A_n=t_0+t_1+t_2+\ldots+t_n$:

(0.5)..............

$$A_n=\frac{n+1}{2}(\ln(2)+\ln(2)+n\ln(\frac{2}{3}))=\frac{n+1}{2}(2\ln(2)+n\ln(\frac{2}{3}))$$

- **استنتاج بدلالة** n **الجداء** $P_n=v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n$

(0.25)..............

$P_n=e^{t_0}\times e^{t_1}\times e^{t_2}\times\ldots\times e^{t_n}=e^{t_0+t_1+\ldots t_n}$ لأنّ : $v_n=e^{t_n}$ و منه $P_n=e^{S_n}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

التنقيط	التبرير	الجواب	الاقتراح
2×0.5	$y'=-e^{-x}+2x+c_1 \Rightarrow y'(0)=-1+c_1=1;c_1=2$ $y=-e^{-x}+2x+c_2 \Rightarrow y(0)=-1+c_2=1\ ;c_2=2$ $y=-e^{-x}+x^2+2x+2$	الإجابة (أ) $y=-e^{x}+x^2+2x+2$	1
2×0.5	$\frac{A_1^1.A_6^1}{A_7^2}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}$	الإجابة (ب) $\frac{1}{7}$	2
2×0.5	$m=\frac{1}{2}\int_0^2 3x^2-\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{2}\left[x^2-\ln(x+1)\right]_0^2$ $m=\frac{8}{2}-\frac{\ln(3)}{2}=4-\ln\sqrt{3}$	الإجابة (أ) $m=4-\ln\sqrt{3}$	3
2×0.5	$u_n=\left[x+\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=1+\frac{1}{n+1}$ $u_{n+1}-u_n=1+\frac{1}{n+2}-1-\frac{1}{n+1}=\frac{-1}{(n+2)(n+1)}<0$	الإجابة (أ) متناقصة تماما	4

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$

-1 تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$: $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$:

$g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln(x)$ و $g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2+1-2x}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}$ ....(0.5)

استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x)\geq0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$. ....(0.5)

-2 دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1)=0$ و الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$ تتلخص الاشارة في الجدول الموالي

x	0		1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$+$	

..............(0.5)

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

-1 اثبات أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ نضع $t=\sqrt{x}$ و منه $\lim(t)=+\infty$ و منه

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[\ln(x)]^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\frac{2\ln(t)}{t}\right]^2=0$ لأن $\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\frac{\ln(t)}{t}\right]=0$ (التزايد المقارن). ....(0.5)

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{2}{x}\right]=+\infty$ لأن ....(0.5)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{2}{x}\right]=0$.

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f(\frac{1}{x})=f(x)$: لدينا

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+x-\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2-2=x+\frac{1}{x}-(-\ln x)^2-2=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2=f(x)$$ (0.5).............

حساب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و منه المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقارب عموديا معادلته $x=0$. (0.75).............

-2 تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ بالحساب $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$ و منه

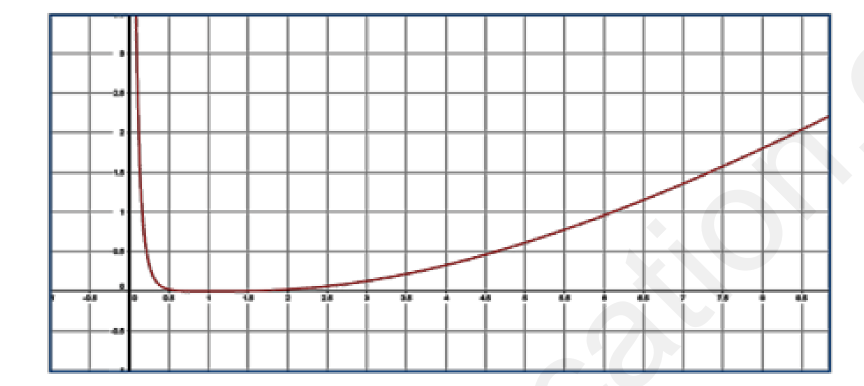
$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-2\frac{1}{x}(\ln x)=\frac{x^2-1-2x\ln x}{x^2}=\frac{x-\frac{1}{x}-2\ln x}{x}=\frac{g(x)}{x}$$ (0.5).............

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

(0.5).............

-3 رسم المنحنى (C) : (0.5).............



-4 بين أن الدالة $h: x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x)$ على $]0,+\infty[$

(0.5).............

$h'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$ محققة

باستعمال التكامل بالتجزئة

(0.75).............

تبيين أن $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$ بوضع $u'(x)=1$ و $v(x)=(\ln x)^2$ و منه $u(x)=x$ و $v'(x)=\frac{2}{x}(\ln x)$

و منه $u'(x)=1$ و $\int_1^e u(x)v'(x)dx=\left[x(\ln(x))^2\right]_1^e-2\int_1^e\ln(x)dx=e-2\left[x\ln x-x\right]_1^e=e-2$

-5 حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$

$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left[x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2\right]dx$ و منه $\int_1^e f(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+\ln(x)-2x\right]_1^e-e+2$

$$\int_1^e f(x)dx=\frac{e^2}{2}+1-2e+\frac{3}{2}-e+2=\left(\frac{e^2}{2}-3e+\frac{9}{2}\right)u.a$$ (0.5).............

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الوادي
ثانوية بوشوشة – المختلطة –



المستوى : السنة الثالثة
علوم تجريبية
السنة الدراسية 2021 / 2022

اختبار البكالوريا التجريبي في مادة: : الرياضيات — المدة :3 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال من الاسئلة جواب واحد صحيح فقط حدده مع التعليل:

1) الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-\frac{2}{e^x+1}$ هي دالة:

أ) فردية ب) زوجية ج) ليست زوجية وليست فردية

2) حل المعادلة التفاضلية: $y'-\ln 3y-\ln 27=0$ والذي يحقق $y(0)=6$ هو

أ) $y(x)=e^x-\ln 3$ ب) $y(x)=3^{x+2}-3$ ج) $y(x)=9e^x-3$

3) A و B حدثان مستقلان و $P(A)=0.2$ و $P(A\cup B)=0.35$ ، احتمال الحدث B هو :

أ) $P(B)=0.15$ ب) $P(B)=0.1875$ ج) $P(B)=0.125$

4) (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{2}{x}(1+\ln x)dx$

نضع: $S=U_0+U_1+\cdots+U_{36}$ قيمة Sهي.

أ) $S=2022$ ب) $S=1444$ ج) $S=1443$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) أدرس تغيّرات الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)-x=0$.

3) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[1;\sqrt{3}]$ فإنّ: $f(x)\in[1;\sqrt{3}]$.

II. (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $1\leqslant U_n\leqslant\sqrt{3}$

ب) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) ، ثمّ استنتج أنها متقاربة وأحسب نهايتها.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $V_n=\frac{(U_n)^2}{3-(U_n)^2}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) أكتب V_n بدلالة n ، ثمّ استنتج U_n بدلالة n وأحسب نهاية (U_n) مجددا.

3) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n : $S_n=\frac{1}{V_0}+\frac{1}{V_1}+\cdots+\frac{1}{V_n}$ و $S'_n=\frac{1}{(U_0)^2}+\frac{1}{(U_1)^2}+\cdots+\frac{1}{(U_n)^2}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 8 كريات لا نفرق بينها باللّمس ، كريتان تحملان الرقم: 0 و أربع كريات تحمل الرقم :2 وكرية تحمل الرقم: 1 وكرية تحمل الرقم: 4.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق.

نعتبر الحدثين:

A : "الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 6".

B: "الكريات المسحوبة جداء أرقامها يساوي 8"

1) أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب.

2) أحسب $P(A \cap B)$ ، هل الحدثين A و B مستقلان؟. برّر إجابتك.

3) استنتج $P_A(B)$ ، ثمّ $P(\overline{A \cap B})$.

4) ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.

أ) عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

ب) أحسب $P\left(\frac{X^2-16}{X} > 0\right)$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{(1+\ln x)^2}{x}$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ وبيّن أنّ : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ، ثمّ فسر النتائج المتحصل عليها بيانيا.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ) أكتب معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

3) g الدالة العددية المعرّفة على $]1; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x + \ln x$.

أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ، واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1; +\infty[$.

ب) برّر أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$: $1 + x + \ln x > 0$.

جـ) إستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (T).

4) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (T).

5) m وسيط حقيقي موجب ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $\ln x = \sqrt{m}x - 1$.

6) أحسب مساحة الحيّز المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x$ ، $x = 1$ و $x = e$.

إنتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

f الدالة المعرّفة على المجال $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ و (Δ) مستقيم ذو المعادلة $y = x$. **(كما في الشكل المقابل)**

(U_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الاول $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = f(U_n)$.

1) أنقل الشكل المقابل، مثّل دون حساب على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 و U_3 مبرزا خطوط الإنشاء.

2) خمّن اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) وتقاربها.

3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n > 1$.

4) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) ، ماذا تستنتج؟.

5) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثمّ استنتج نهاية المتتالية (U_n).

6) (V_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأوّل.

ب) أكتب عبارة U_n بدلالة n.

جـ) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = \frac{V_0 - 1}{U_0} + \frac{V_1 - 1}{U_1} + \cdots\cdots + \frac{V_n - 1}{U_n}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال من الاسئلة جواب واحد صحيح فقط حدده مع التعليل:

1) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = 3x + \dfrac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1}$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته:

أ) $y = 3x$ ب) $y = 3x + 1$ جـ) $y = 3x + 2$

2) نعتبر العدد الحقيقي $A(\lambda) = \displaystyle\int_1^{\lambda} x \ln x dx$ حيث $\lambda > 1$ ، علما أن الدالة: $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\left[\ln x - \dfrac{1}{2}\right]$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x \ln x$ ، قيمة λ التي من أجلها $A(\lambda) = \dfrac{1}{4}$ هي:

أ) $\lambda = e^{-1}$ ب) $\lambda = \sqrt{e}$ جـ) $\lambda = 2e$

3) المعادلة: $\log(11x^2 - 6x + 5) = \log(x^2) + 1$ تقبل حلان في $\mathbb{R}$ هما:

أ) $S = \{1; -5\}$ ب) $S = \{1; 5\}$ جـ) $S = \{-1; -5\}$

4) المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = 2 - 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ هي متتالية

أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما جـ) ليست رتيبة

التمرين الثالث: **(04 نقاط)**

وحدة إنتاجية يسيرها 20 عامل منهم 8 نساء و 12 رجال ، من بينهم العامل " مراد ".

1) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة عمال. ، أحسب احتمال كل حدث من الحوادث الآتية:

A: " أعضاء اللجنة نساء". B: " اللجنة تضم على الأكثر إمرأة ". C: "اللجنة تضم على الأقل إمرأة ".

2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة مشكلة ، عدد الرجال الموجودين فيها.

أ) عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

ب) أحسب $P(X^2 - 2X \leqslant 0)$.

3) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من رئيس، نائب و كاتب ، أحسب احتمال كل حدث من الحوادث الآتية :

D: "رئيس اللجنة من الرجال ". E: " رئيس ونائب اللجنة من نفس الجنس ".

F: "العامل " مراد " موجود في اللجنة ".

التمرين الرابع: **(08 نقاط)**

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$.

1) أحسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.74; -0.73[$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (-2x-3)e^{-x} + x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل المنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) بيّن أنّ : $f(\alpha) = \alpha + 1 + \dfrac{2}{2\alpha+1}$ ، ثمّ عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

5) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.

6) أنشئ كلاّ من (Δ) و (C_f). (يعطى $f(-1.65) \approx 0$ و $f(1.4) \approx 0$).

7) أ) عيّن العددين a و b حتّى تكون الدالة $H(x) = (ax+b)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h(x) = (-2x-3)e^{-x}$.

ب) أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيّز من المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = \lambda$ (حيث λ عدد حقيقي موجب تماما).

جـ) أحسب: $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

إنتهى الموضوع الثّاني

الإجابة النموذجية عن أسئلة البكالوريا التجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التحليل:

1/ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-\frac{2}{e^x+1}$ هي دالة فردية

الجواب: فردية

التحليل:

لدينا $f(x)=1-\frac{2}{e^x+1}=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

* لدينا $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة لـ "0"

أي من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$

* $f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{(e^x-1)}{e^x+1}$

$=-f(x)$

ومنه f دالة فردية

2/ حل المعادلة التفاضلية $y'-\ln3\,y-\ln27=0$ والتي تحقق $y(0)=6$ هي $y(x)=3^{x+2}-3$

الجواب: ب/

التحليل:

لدينا $y'-\ln3\,y=\ln27$

$y'=(\ln3)y+\ln27$

هي من الشكل $y'=ay+b$

حلولها من الشكل

$y(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$

إذا $y(x)=Ce^{(\ln3)x}-\frac{\ln27}{\ln3}$

$=Ce^{\ln3^x}-\frac{3\ln3}{\ln3}$

$y(x)=C\times3^x-3$ ......(1)

لدينا $y(0)=6$ أي

$C\times3^0-3=6$

$C=6+3=9$

بتعويض في (1) نجد:

$y(x)=9\times3^x-3$

$=3^2\times3^x-3$

$y(x)=3^{x+2}-3$

3/ A و B حدثان مستقلان

$P(A\cup B)=0{,}35$ ، $P(A)=0{,}2$

احتمال الحادثة B هو

الجواب: ب/ $P(B)=0{,}1875$

التحليل:

لدينا A و B مستقلان

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

ولدينا $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$

$P(A\cap B)-P(A)=P(B)(1-P(A))$

$P(B)=\frac{P(A\cap B)-P(A)}{1-P(A)}$

$=\frac{0{,}35-0{,}2}{1-0{,}2}=0{,}1875$

4/ (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{2}{x}(1+\ln x)$ ،

المجموع S_n حيث

$$S_n=U_0+U_1+\dots+U_{36}$$

الجواب: ج/ $S_n=1443$

التحليل:

نحسب

$$U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{2}{x}(1+\ln x)\,dx$$

$$=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(\frac{2}{x}+2\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

$$=\left[2\ln x+(\ln x)^2\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$=2\ln e^{n+1}+(\ln(e^{n+1}))^2-2\ln e^n-(\ln e^n)^2$$

$$=2(n+1)+(n+1)^2-2n-n^2$$

$$=2n+2+n^2+2n+1-2n-n^2$$

$$=2n+3$$

وهي متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول 3

$$S_n=U_0+U_1+\dots+U_{36}$$

$$S_n=\frac{(n-p+1)}{2}(U_p+U_n)\quad \Big|\; p=0,\; n=36$$

$$=\frac{(36-0+1)}{2}(U_0+U_{36})$$

$$=\frac{37}{2}(3+75)=\frac{37\times 78}{2}$$

$$=1443$$

التمرين الثاني:

I. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

1/ دراسة تغيرات f وتشكيل جدول تغيراتها.

* النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x}=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{|x|}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

* اتجاه تغير f:

f دالة ق. إ على IR ودالتها المشتقة

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+1}-2x\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{2(x^2+1)-2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)}$$

$$=\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$$

لأن: $x^2+1>0$ و $\sqrt{x^2+1}>0$

ومنه f متزايدة تماما على IR

2/ حل المعادلة $f(x) - x = 0$

$$f(x) - x = 0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - x = 0$$

$$\frac{2x - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

وبالتالي

$$2x - x\sqrt{x^2+1} = 0$$

$$x(2 - \sqrt{x^2+1}) = 0$$

اما $x = 0$ او $2 - \sqrt{x^2+1} = 0$

$$2 - \sqrt{x^2+1} = 0$$

$$\sqrt{x^2+1} = 2$$

$$x^2 + 1 = 4$$

$$x^2 = 3$$

$x = \sqrt{3}$ او $x = -\sqrt{3}$

ومنه حلول المعادلة

$$S = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

3/ بيان أنه من أجل $x \in [1, \sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1, \sqrt{3}]$

لدينا $x \in [1, \sqrt{3}]$

أي $1 \leq x \leq \sqrt{3}$

وبما أن f دالة متزايدة على المجال $[1, \sqrt{3}]$ فإن

$$f(1) \leq f(x) \leq f(\sqrt{3})$$

$$1 \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq \sqrt{3}$$

أي $1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$

ومنه $f(x) \in [1, \sqrt{3}]$

II $U_0 = 1$ ، $U_{n+1} = f(U_n)$

1/ أ/ بيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$

$$1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$$

نفرض $P(n): 1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

$P(0): 1 \leq U_0 = 1 \leq \sqrt{3}$ (محققة)

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونثبت صحة $P(n+1)$

لدينا $1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

وبما أن f دالة متزايدة على المجال $[1, \sqrt{3}]$ فإن

$$f(1) \leq f(U_n) \leq f(\sqrt{3})$$

$$1 \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \leq U_{n+1} \leq \sqrt{3}$$

أي $1 \leq U_{n+1} \leq \sqrt{3}$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير (U_n) واستنتاج تقاربها وحساب نهاية (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$$

$$= \frac{2U_n - U_n\sqrt{U_n^2+1}}{\sqrt{U_n+1}}$$

$$= \frac{U_n(2 - \sqrt{U_n^2+1})}{\sqrt{U_n^2+1}}$$

إشارة الفرق من إشارة

$2-\sqrt{U_n^2+1}$ لأن $\sqrt{U_n^2+1}>0$

و $1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

لدينا $1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

$$1 \leq U_n^2 \leq 3$$

$$2 \leq U_n^2+1 \leq 4$$

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{U_n^2+1} \leq 2$$

بضرب الطرفين في العدد (1-) نجد

$$-2 \leq -\sqrt{U_n^2+1} \leq -\sqrt{2}$$

$$0 \leq 2-\sqrt{U_n^2+1} \leq 2-\sqrt{2}$$

ومنه $2-\sqrt{U_n^2+1} \geq 0$

ومنه (U_n) متزايدة تماما

ملاحظة

يمكن استخدام جدول إشارة

$2-\sqrt{x^2+1}$

---

* الاستنتاج:

(U_n) متزايدة تماما ومحدودة

من الأعلى $(U_n \leq \sqrt{3})$ فهي متقاربة

* حساب نهاية (U_n)

لدينا (U_n) متقاربة وبالتالي

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = l$$

$$f(l) = l$$

$$f(l) - l = 0$$

قمنا بحل المعادلة سابقا

وحلولها هي

$$S = \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

$l=0$ مرفوض لأن $1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

$l=-\sqrt{3}$ مرفوض لأن $1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

$l=\sqrt{3}$ مقبول

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{3}$$

/2 $$V_n = \frac{(U_n)^2}{3-(U_n)^2}$$

أ/ تبيان أن (V_n) م هندسية بطلب

$q=?$ و $V_0=?$

$$V_{n+1} = \frac{(U_{n+1})^2}{3-(U_{n+1})^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{2U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}\right)^2}{3-\left(\frac{2U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{4U_n^2}{U_n^2+1}}{3-\frac{4U_n^2}{U_n^2+1}}$$

$$= \frac{\frac{4U_n^2}{U_n^2+1}}{\frac{3U_n^2+3-4U_n^2}{U_n^2+1}}$$

$$= \frac{4U_n^2}{-U_n^2+3} = 4\left(\frac{U_n^2}{3-U_n^2}\right)$$

$$= 4V_n$$

ومنه (V_n) م هندسية أساسها

$$q=4$$

وحدها الأول

$$V_0 = \frac{(U_0)^2}{3-(U_0)^2} = \frac{1}{3-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

ب/ كتابة V_n بدلالة n واستنتاج U_n بدلالة n ، وحساب نهاية (U_n)

* لدينا (V_n) م هندسية

$$V_n = V_p \times q^{n-p} \quad \begin{cases} p=0 \\ q=4 \\ n=n \end{cases}$$

$$= V_0 \times 4^{n-0}$$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{2}(4)^n}$$

* كتابة U_n بدلالة n

لدينا $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}$

$$V_n(3-U_n^2) = U_n^2$$

$$3V_n - U_n^2 V_n - U_n^2 = 0$$

$$U_n^2(-V_n-1) = -3V_n$$

$$U_n^2 = \frac{-3V_n}{-V_n-1}$$

$$U_n^2 = \frac{3V_n}{V_n+1}$$

$$\begin{cases} U_n = -\sqrt{\dfrac{3V_n}{V_n+1}} & \text{(مرفوضة لأن } 1 \le U_n \le \sqrt{3}\text{)} \\ U_n = \sqrt{\dfrac{3V_n}{V_n+1}} \end{cases}$$

ومنه

$$U_n = \sqrt{\frac{3(\frac{1}{2})\times 4^n}{(\frac{1}{2})\times 4^n + 1}}$$

* حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{3(\frac{1}{2})4^n}{\frac{1}{2}\times 4^n + 1}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\times 4^n}{4^n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4^n}\right)}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{3/2}{1/2}} = \sqrt{3}$$

3/ حساب بدلالة n المجموع

$$S_n = \frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n}$$

لدينا $\left(\frac{1}{V_n}\right)$ م هندسية أساسها $q' = \frac{1}{q} = \frac{1}{4}$ وحدها الأول

$$\frac{1}{V_0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$S_n = \frac{1/V_0}{1-q'}\left(1-(q')^{n-0+1}\right)$$

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{4}}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{2}{\frac{3}{4}}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}$$

$$S'_n = \frac{1}{(U_0)^2} + \frac{1}{(U_1)^2} + \dots + \frac{1}{(U_n)^2}$$

لدينا $V_n = \frac{U_n^2}{3-U_n^2}$

أي $\frac{1}{V_n} = \frac{3-U_n^2}{U_n^2}$

$$\frac{1}{V_n} = \frac{3}{U_n^2} - 1$$

$$\frac{1}{V_n} + 1 = \frac{3}{U_n^2}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{V_n}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{U_n^2}$$

$$S'_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n}\right) + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3}}_{(n+1) \text{ مرة}}$$

$$S'_n = \frac{1}{3} S_n + \frac{1}{3}(n+1)$$

$$S'_n = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right) + \frac{1}{3}(n+1)$$

$$= \frac{8}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}(n+1)$$

التمرين الثالث :

② ② ① ⓪
② ② ④ ⓪

التجربة : سحب 3 كريات

الكيفية : في آن واحد

طريقة العد : توفيقة $C_8^3 = 56$

"A" الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي

"B" " " جداء أرقامها يساوي 8

1/ حساب $P(A)$ و $P(B)$

3 كريات ② أو ⓪ و ②، ④

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_4^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{C_8^3}$$

$$= \frac{4+8}{56} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

3 كريات ② أو ① ② ④

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3}$$

$$= \frac{4+4}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

2/ حساب $P(A \cap B)$ وهل الحدثان A و B مستقلان

$A \cap B$ الكريات المسحوبة جداء أرقامها 8 ومجموعها 6

توجد حالة واحدة وهي 3 كريات ②

$$P(A \cap B) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$=0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y^2}{y}\right)^2$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{2\ln y}{y}\right)^2=0$$

ومنه $y=0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f)

2/ أ/ بيان أن من أجل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$

f دالة ق.ا على $]0,+\infty[$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=\frac{2\left(\frac{1}{x}\right)(1+\ln x)x-(1+\ln x)^2}{x^2}$$

$$=\frac{(1+\ln x)\left[2-(1+\ln x)\right]}{x^2}$$

$$=\frac{(1+\ln x)(2-1-\ln x)}{x^2}$$

$$=\frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$$

X	$-\infty$	-4		0		4	$+\infty$
X	$-$		$-$	0	$+$		$+$
X^2-16	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{X^2-16}{X}$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

حلول المتراجحة $\frac{X^2-16}{X}>0$ هي

$-4<X<0$ أو $X>4$

$$P\left(\frac{X^2-16}{X}\right)=P(X>4)$$

$$=P(X=8)+P(X=16)$$

$$=\frac{8}{16}+\frac{6}{16}=\frac{14}{16}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

التمرين الرابع:

$$f(x)=\frac{(1+\ln x)^2}{x}$$

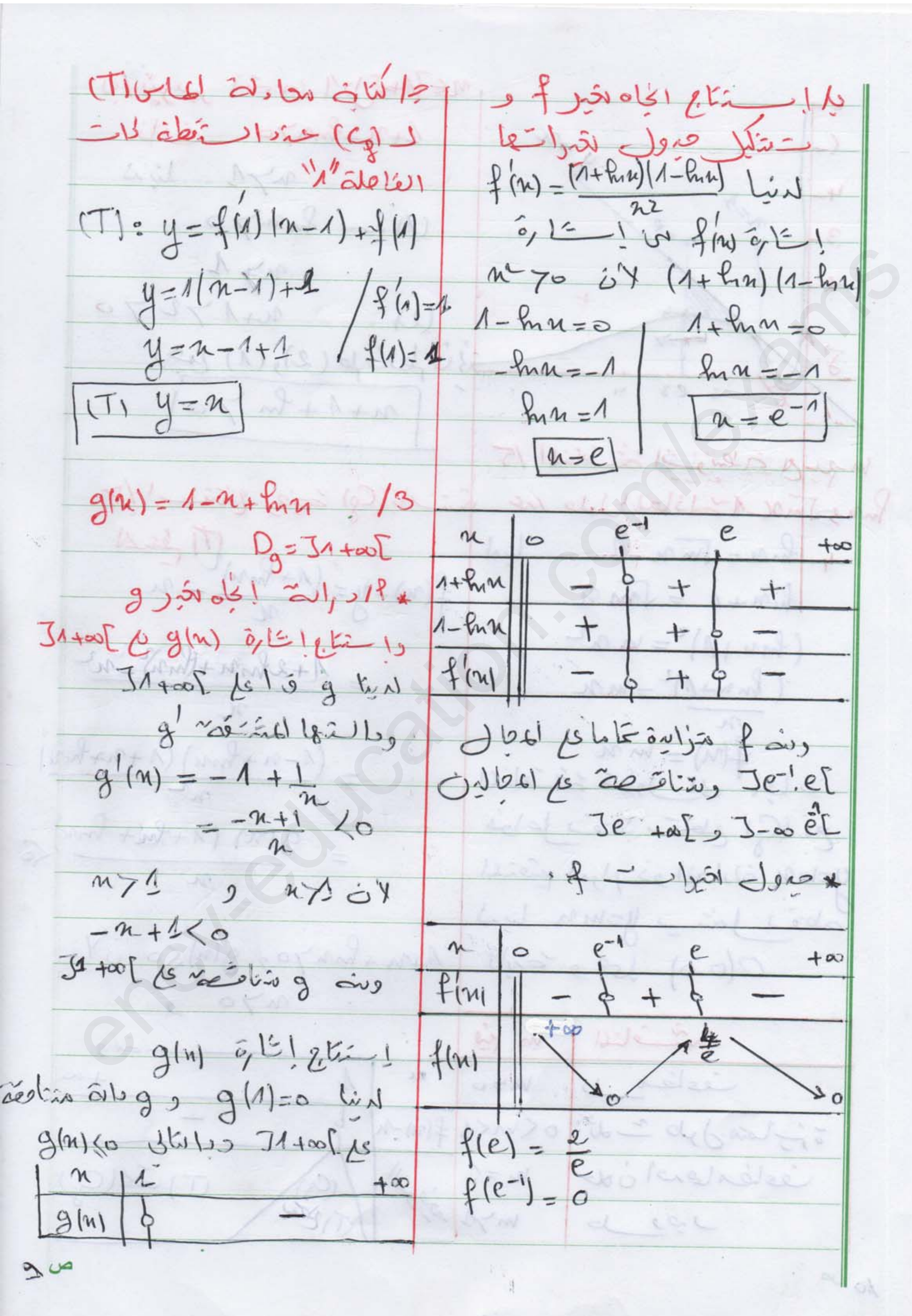
$D_f=]0,+\infty[$

1/ حساب $\lim_{x\to 0} f(x)$ وبيان أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ وتفسير النتائج

$$*\lim_{x\to 0^{>}} f(x)=\lim_{x\to 0^{>}}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to 0^{>}}(1+\ln x)^2=+\infty$ ،

$x=0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)



ب/ استنتاج اتجاه تغير f و تشكيل جدول تغيراتها

لدينا $f'(x) = \frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1+\ln x)(1-\ln x)$ لأن $x^2 > 0$

$1 - \ln x = 0$ | $1 + \ln x = 0$
$-\ln x = -1$ | $\ln x = -1$
$\ln x = 1$ | $x = e^{-1}$
$x = e$ |

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]e^{-1}, e[$ ومتناقصة على المجالين $]-\infty, e^{-1}[$ و $]e, +\infty[$

* جدول التغيرات f:

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

$f(e) = \frac{2}{e}$

$f(e^{-1}) = 0$

ج/ كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة "1"

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = 1(x-1) + 1$ / $f'(1) = 1$

$y = x - 1 + 1$ / $f(1) = 1$

$(T): y = x$

3/ $g(x) = 1 - x + \ln x$

$D_g =]1, +\infty[$

* أ/ دراسة اتجاه تغير g واستنتاج إشارة $g(x)$ في $]1, +\infty[$

لدينا g قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ ودالتها المشتقة g'

$g'(x) = -1 + \frac{1}{x}$

$= \frac{-x+1}{x} < 0$

لأن $x > 1$ و $x > 1$

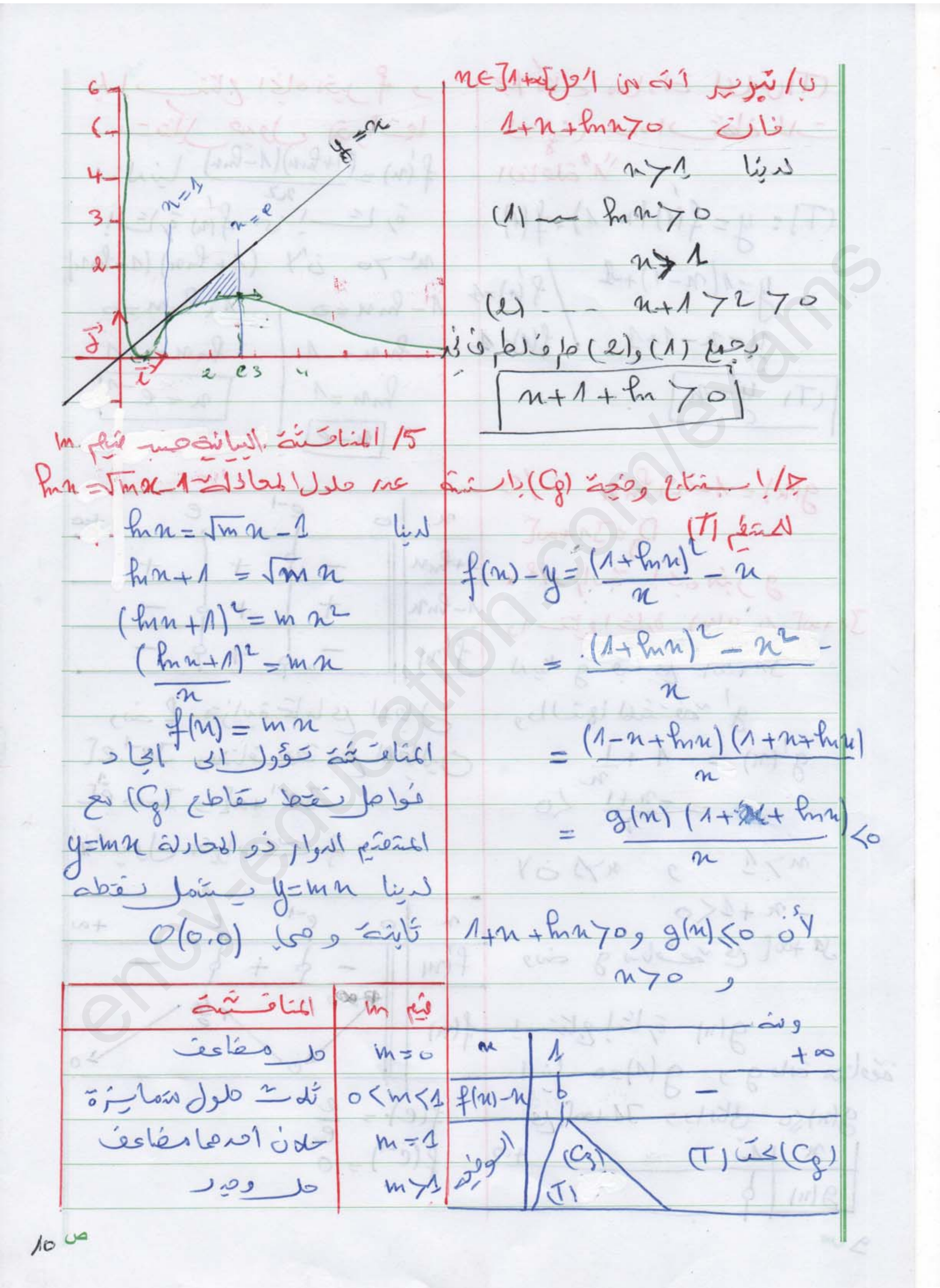
$-x + 1 < 0$

ومنه g متناقصة على $]1, +\infty[$

استنتاج إشارة $g(x)$

لدينا $g(1) = 0$ و g دالة متناقصة على $]1, +\infty[$ وبالتالي $g(x) < 0$

x	1		$+\infty$
$g(x)$	0	$-$	



ب/ تبرير أنه من أجل $x\in]1,+\infty[$ فإن: $1+x+\ln x>0$

لدينا $x>1$

$\ln x>0$ ---- (1)

$x>1$

$x+1>2>0$ ---- (2)

بجمع (1)، (2) طرفا لطرف نجد

$$x+1+\ln x>0$$

جـ/ استنتاج وضعية (C_g) بالنسبة للمستقيم (T)

$$f(x)-y=\frac{(1+\ln x)^2}{x}-x$$

$$=\frac{(1+\ln x)^2-x^2}{x}$$

$$=\frac{(1-x+\ln x)(1+x+\ln x)}{x}$$

$$=\frac{g(x)(1+x+\ln x)}{x}<0$$

لأن $g(x)\le 0$ و $1+x+\ln x>0$ و $x>0$

ومنه

x	1	$+\infty$
$f(x)-x$	0	$-$
الوضع	(C_g) / (T)	(C_g) تحت (T)

5/ المناقشة البيانية حسب قيم m

عدد حلول المعادلة $\ln x=\sqrt{mx}-1$

لدينا $\ln x=\sqrt{mx}-1$

$\ln x+1=\sqrt{mx}$

$(\ln x+1)^2=mx^2$

$\frac{(\ln x+1)^2}{x}=mx$

$f(x)=mx$

المناقشة تؤول إلى ايجاد فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم الدوار ذو المعادلة $y=mx$

لدينا $y=mx$ يشمل نقطة ثابتة وهي $O(0,0)$

قيم m	المناقشة
$m=0$	حل مضاعف
$0<m<1$	ثلاث حلول متمايزة
$m=1$	حلان أحدهما مضاعف
$m>1$	حل وحيد

6/ حساب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات $x=e$ ، $x=1$ ، $y=x$

$$A=\int_1^e y-f(x)\,dx$$

$$=\int_1^e x-\frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$=\int_1^e x-\frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x}\,dx$$

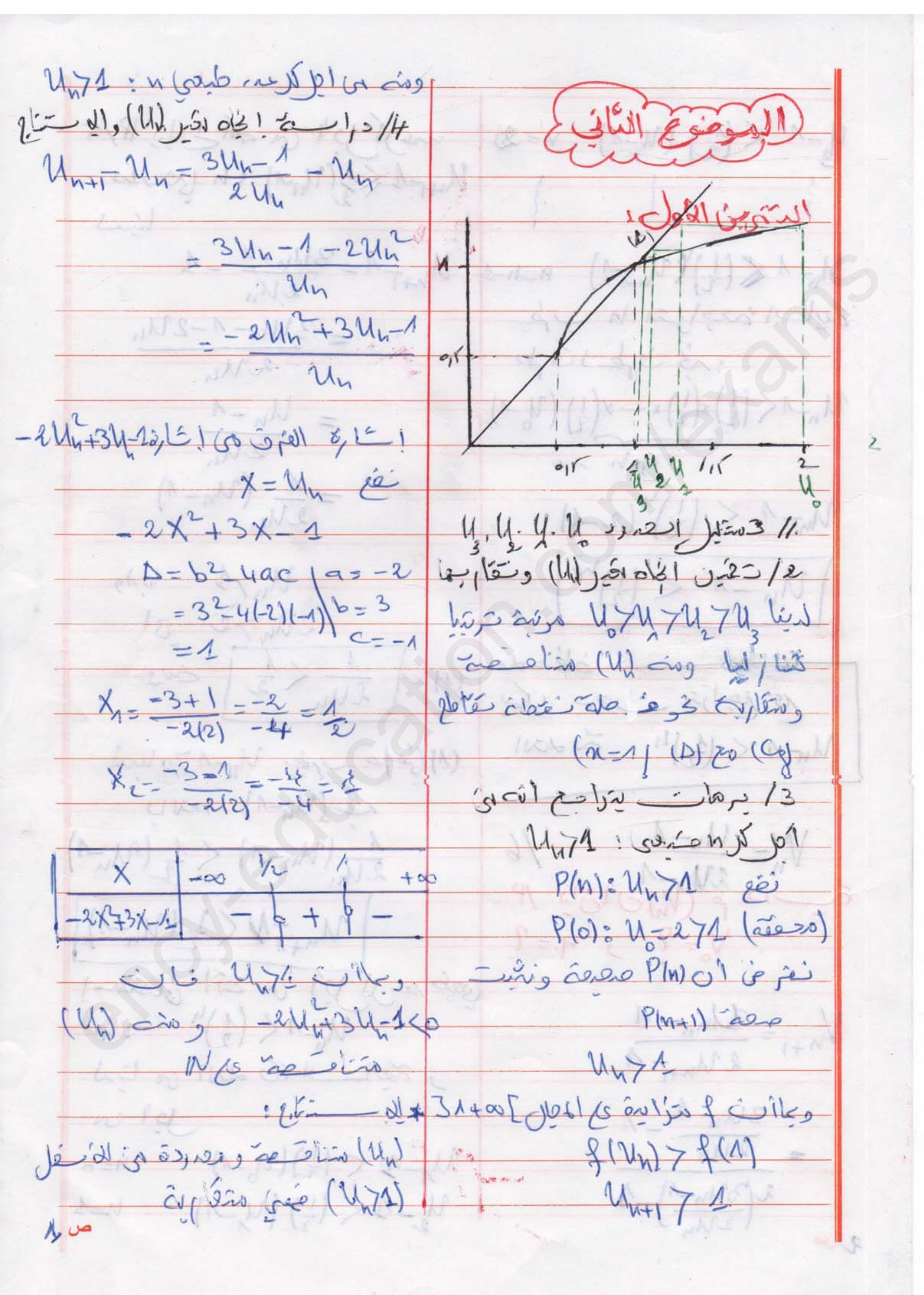
$$=\int_1^e x-\frac{1}{x}-2\frac{\ln x}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln x-(\ln x)^2-\frac{1}{3}(\ln x)^3\right]_1^e$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^2-1-1-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-0-0-0\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{3}\right)-\frac{1}{2}\ u.a$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{17}{6}\ u.a$$



الموضوع الثاني

التمرين الأول:

1/ تمثيل الحدود $u_0 . u_1 . u_2 . u_3$

2/ تخمين اتجاه تغير (u_n) وتقاربها

لدينا $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ مرتبة ترتيبا تنازليا ومنه (u_n) متناقصة

ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (D) أي $x=1$

3/ برهان بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي: $u_n > 1$

نضع $P(n): u_n > 1$

$P(0): u_0 = 2 > 1$ (محققة)

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونثبت صحة $P(n+1)$

$u_n > 1$

وبما أن f متزايدة في المجال $]1;+\infty[$

$f(u_n) > f(1)$

$u_{n+1} > 1$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 1$

4/ دراسة اتجاه تغير (u_n) والاستنتاج

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - u_n$$

$$= \frac{3u_n - 1 - 2u_n^2}{u_n}$$

$$= \frac{-2u_n^2 + 3u_n - 1}{u_n}$$

إشارة الفرق من إشارة $-2u_n^2+3u_n-1$

نضع $x = u_n$

$-2x^2+3x-1$

$\Delta = b^2 - 4ac$ | $a=-2$, $b=3$, $c=-1$

$= 3^2 - 4(-2)(-1)$

$= 1$

$$x_1 = \frac{-3+1}{-2(2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3-1}{-2(2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$-2x^2+3x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وبما أن $u_n > 1$ فإن $-2u_n^2+3u_n-1<0$ ومنه (u_n) متناقصة في $\mathbb{N}$

* الاستنتاج: (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل $(u_n > 1)$ فهي متقاربة

2

5/ أ/ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}-1<\frac{1}{2}(U_n-1)$

لدينا

$$U_{n+1}-1=\frac{3U_n-1}{2U_n}-1$$

$$=\frac{3U_n-1-2U_n}{2U_n}$$

$$=\frac{U_n-1}{2U_n}$$

$$=\frac{1}{2U_n}(U_n-1)$$

ولدينا $U_n>1$

أي $2U_n>2$

ومنه $\frac{1}{2U_n}<\frac{1}{2}$ —(1)

لدينا $U_n-1>0$ بضرب طرفي (1) بالعدد (U_n-1) نجد

$$\frac{1}{2U_n}(U_n-1)<\frac{1}{2}(U_n-1)$$

$$U_{n+1}-1<\frac{1}{2}(U_n-1)$$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n-1<\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا من العلاقة السابقة، ومن أجل

$U_1-1<\left(\frac{1}{2}\right)(U_0-1)$ $n=0$

$U_2-1<\left(\frac{1}{2}\right)(U_1-1)$ $n=1$

$U_3-1<\left(\frac{1}{2}\right)(U_2-1)$ $n=2$

⋮

$U_n-1<\left(\frac{1}{2}\right)(U_{n-1}-1)$ $n=n-1$

بضرب n متراجحة السابقة طرف لطرف نجد:

$$U_n-1<\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}\right)}_{n\text{ مرة}}(U_0-1)$$

$$U_n-1<\left(\frac{1}{2}\right)^n(2-1)$$

$$U_n-1<\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ملاحظة: يمكن برهان المتراجحة $U_n-1<\left(\frac{1}{2}\right)^n$ بالتراجع

6/ $V_n=\frac{U_n-1}{2U_n-1}$

أ/ تبيان أن (V_n) م هندسية

$V_0=?$, $q=?$

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{2U_{n+1}-1}$$

$$=\frac{\frac{3U_n-1}{2U_n}-1}{2\left(\frac{3U_n-1}{2U_n}\right)-1}$$

$$= \frac{\frac{3U_n-1-2U_n}{2U_n}}{\frac{6U_n-2-2U_n}{2U_n}}$$

$$= \frac{U_n-1}{4U_n-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_n-1}{2U_n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}V_n$$

ومنه (V_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$V_0 = \frac{U_0-1}{2U_0-1} = \frac{2-1}{2(2)-1} = \frac{1}{3}$$

ب/ كتابة U_n بدلالة n

* كتابة V_n بدلالة n

(V_n) م هندسية

$$V_n = V_p \times q^{n-p} \quad \left|\begin{array}{l} p=0 \\ q=\frac{1}{2} \\ n=n \end{array}\right.$$

$$= V_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

* لدينا $V_n = \frac{U_n-1}{2U_n-1}$

$$V_n(2U_n-1) = U_n-1$$

$$2V_nU_n - V_n = U_n - 1$$

$$2V_nU_n - U_n = V_n - 1$$

$$(2V_n-1)U_n = V_n-1$$

$$U_n = \frac{V_n-1}{2V_n-1}$$

$$\boxed{U_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}}$$

جـ/ حساب المجموع S_n

$$S_n = \frac{V_0-1}{U_0} + \frac{V_1-1}{U_1} + \dots + \frac{V_n-1}{U_n}$$

لدينا مما سبق

$$(2V_n-1)U_n = V_n-1$$

$$\boxed{2V_n-1 = \frac{V_n-1}{U_n}}$$

$$S_n = (2V_0-1)+(2V_1-1)+\dots+(2V_n-1)$$

$$= 2\underbrace{(V_0+V_1+\dots+V_n)}_{q=\frac{1}{2}\text{ م ه}} - \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{\text{عدد }(n+1)}$$

$$= 2\frac{V_0}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - (n+1)$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - n - 1$$

$$\boxed{S_n = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - n - 1}$$

التمرين الثاني:

اختيار الإجابة الصحيحة مع التبرير

1/ منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}+3x$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $(+\infty)$ معادلته

الجواب: جـ/ $y=3x+2$

التحليل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-3x =$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x+\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}-3x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}=2$$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(3x+2)=0$$

ومنه $y=3x+2$ معادلة مستقيم مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

د/ $A(\lambda)=\int_1^{\lambda} x\ln x\,dx$ ، $\lambda>1$

قيمة λ حتى $A(\lambda)=\frac{1}{4}$ هي

الجواب: ب/ $\lambda=\sqrt{e}$

التحليل:

$$A(\lambda)=\int_1^{\lambda} x\ln x\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_1^{\lambda}$$

$$=\left(\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$$

حتى يكون $A(\lambda)=\frac{1}{4}$

$$\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)=0$$

$\frac{\lambda^2}{2}=0$

$\lambda^2=0$

$\lambda=0$ مستحيل لأن $\lambda>1$

$\ln\lambda-\frac{1}{2}=0$

$\ln\lambda=\frac{1}{2}$

$\lambda=e^{\frac{1}{2}}$

ومنه $\lambda=\sqrt{e}$

3/ المعادلة $\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$ تقبل حلان هما:

الجواب: ب/ $S=\{1,5\}$

التحليل:

$$\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$$

هي معرفة على $\mathbb{R}^*$ لأن

$11x^2-6x+5>0$ ، $x^2>0$

$$\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$$

$$\frac{\ln(11x^2-6x+5)}{\ln 10}=\frac{\ln x^2}{\ln 10}+1$$

$\ln(11x^2-6x+5) = \ln x^2 + \ln 10$

$\ln(11x^2-6x+5) = \ln 10x^2$

$11x^2-6x+5 = 10x^2$

$x^2-6x+5=0$

$\Delta = b^2-4ac$ | $a=1$, $b=-6$, $c=5$

$= 36-4(1)(5)$

$=16$

$x_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$x_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$

ومنه $S=\{1,5\}$

/4 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = 2-3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

هي متتالية:

الجواب: أ/ متزايدة تماما

التحليل:

$u_{n+1}-u_n = \left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)-\left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

$= -3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$= 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(-\frac{1}{4}+1\right)$

$= 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)$

$= \frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$

ومنه (u_n) متزايدة تماما

التمرين الثالث:

عدد الرجال: 12
عدد النساء: 08

عدد العمال: $20 = 12+8$

التجربة تشكيل لجنة من 03 عمال المهام غير مذكورة

طريقة العد: توفيقة $C_{20}^3 = 1140$

1/ حساب احتمال الحوادث التالية

"A" أعضاء اللجنة نساء

$P(A) = \frac{C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{14}{285}$

"B" اللجنة تضم امرأة على الأكثر

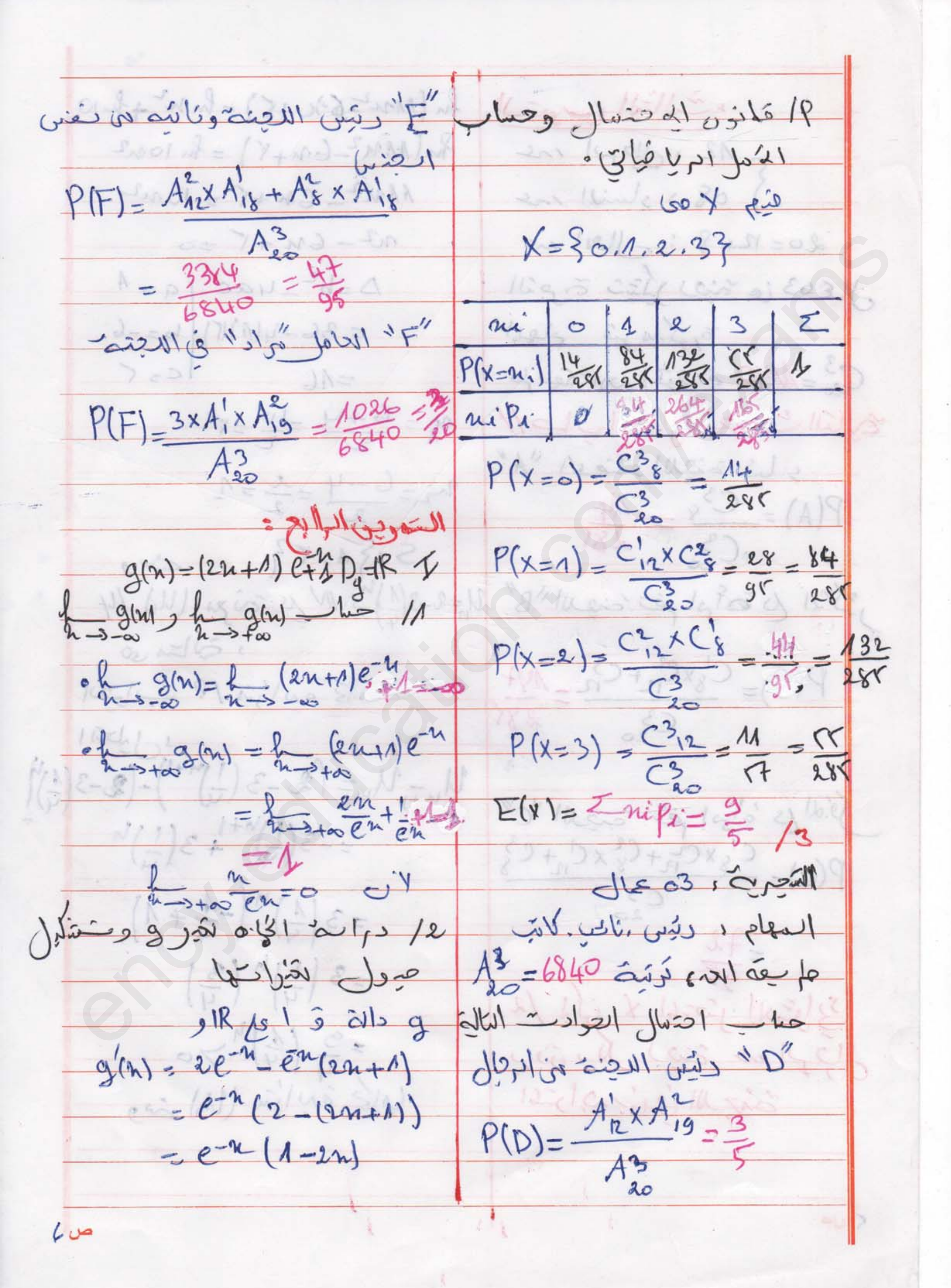
$P(B) = \frac{C_8^1 \times C_{12}^2 + C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{187}{285}$

"C" اللجنة تضم امرأة على الأقل

$P(C) = \frac{C_8^1 \times C_{12}^2 + C_8^2 \times C_{12}^1 + C_8^3}{C_{20}^3}$

$= \frac{72}{95}$

2/ ليكن X المتغير العشوائي يرفق بكل لجنة عدد الرجال المتواجدين في اللجنة



2/ قانون الاحتمال وحساب الأمل الرياضي.

قيم X هي

$X=\{0,1,2,3\}$

x_i	0	1	2	3	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{14}{285}$	$\frac{84}{285}$	$\frac{132}{285}$	$\frac{55}{285}$	1
$x_i P_i$	0	$\frac{84}{285}$	$\frac{264}{285}$	$\frac{165}{285}$	

$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{20}^3}=\frac{14}{285}$

$P(X=1)=\frac{C_{12}^1 \times C_8^2}{C_{20}^3}=\frac{28}{95}=\frac{84}{285}$

$P(X=2)=\frac{C_{12}^2 \times C_8^1}{C_{20}^3}=\frac{44}{95}=\frac{132}{285}$

$P(X=3)=\frac{C_{12}^3}{C_{20}^3}=\frac{11}{57}=\frac{55}{285}$

$E(X)=\Sigma x_i p_i=\frac{9}{5}$

/3 التجربة: 03 عمال

المهام: رئيس، نائب، كاتب

طريقة السحب ترتيبة $A_{20}^3=6840$

حساب احتمال الحوادث التالية

"D" رئيس اللجنة من الرجال

$P(D)=\frac{A_{12}^1 \times A_{19}^2}{A_{20}^3}=\frac{3}{5}$

"E" رئيس اللجنة ونائبه من نفس الجنس

$P(F)=\frac{A_{12}^2 \times A_{18}^1 + A_8^2 \times A_{18}^1}{A_{20}^3}$

$=\frac{3384}{6840}=\frac{47}{95}$

"F" العامل "مراد" في اللجنة

$P(F)=\frac{3 \times A_1^1 \times A_{19}^2}{A_{20}^3}=\frac{1026}{6840}=\frac{3}{20}$

التمرين الرابع:

$g(x)=(2x+1)e^{-x}+1 \quad D_g=\mathbb{R}$ I

1/ حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

• $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} (2x+1)e^{-x}+1=-\infty$

• $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} (2x+1)e^{-x}+1$

$=\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}+1$

$=1$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}=0$

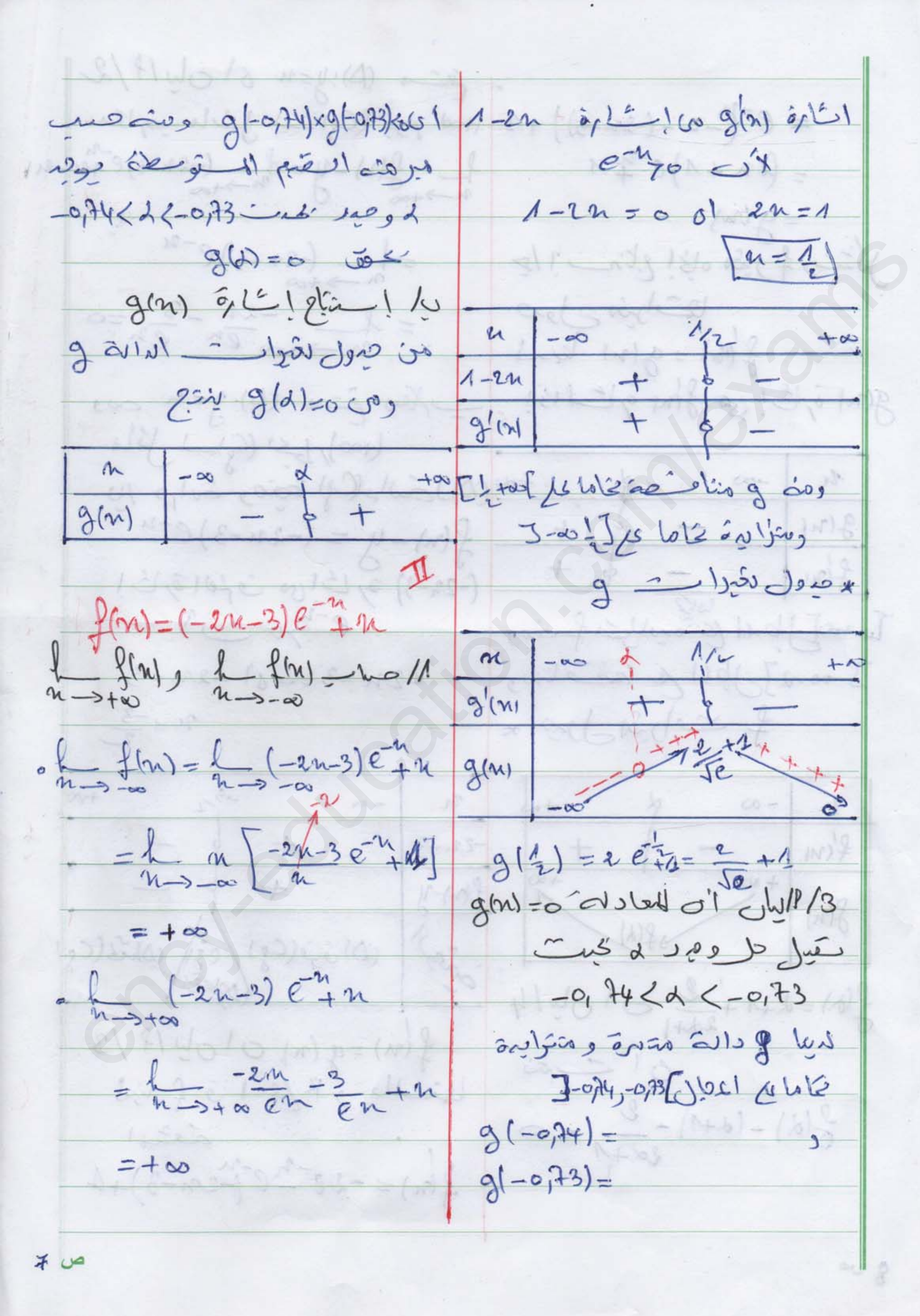
2/ دراسة اتجاه تغير g وتشكيل جدول تغيراتها

g دالة ق إ ع IR و

$g'(x)=2e^{-x}-e^{-x}(2x+1)$

$=e^{-x}(2-(2x+1))$

$=e^{-x}(1-2x)$



إشارة $g'(x)$ من إشارة $1-2x$ لأن $e^{-x}>0$

$1-2x=0$ أي $2x=1$

$x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه g متناقصة تماما على $[\frac{1}{2};+\infty[$ ومتزايدة تماما على $]-\infty;\frac{1}{2}]$

* جدول تغيرات g

x	$-\infty$	α	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}+1$	↘	0

$g(\frac{1}{2}) = 2e^{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{\sqrt{e}}+1$

3/P/ إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث

$-0,74<\alpha<-0,73$

لدينا g دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0,74;-0,73[$

$g(-0,74)=$,

$g(-0,73)=$

$g(-0,74)\times g(-0,73)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α وحيد تحقق $-0,74<\alpha<-0,73$ يحقق $g(\alpha)=0$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$

من جدول تغيرات الدالة g ومن $g(\alpha)=0$ ينتج

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II

$f(x)=(-2x-3)e^{-x}+x$

1/ حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-2x-3)e^{-x}+x$

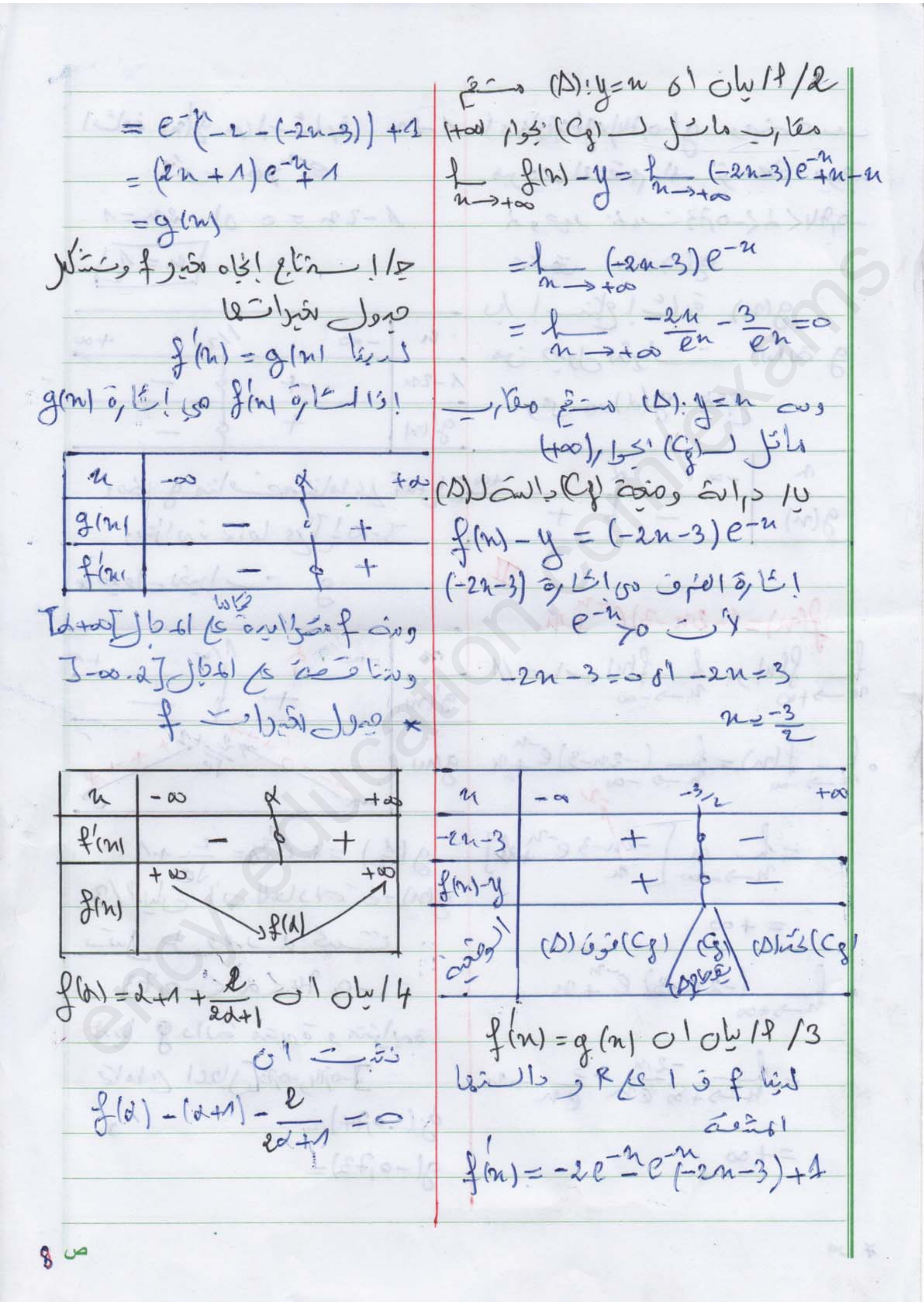
$= \lim_{x\to-\infty} x\left[\frac{-2x-3}{x}e^{-x}+1\right]$

$=+\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} (-2x-3)e^{-x}+x$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{e^{x}} - \frac{3}{e^{x}} + x$

$=+\infty$



2/ ب/ بيان أن $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim_{x\to+\infty} (-2x-3)e^{-x}+x-x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (-2x-3)e^{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{e^x} - \frac{3}{e^x} = 0$$

ومنه $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $(+\infty)$

ب/ دراسة وضعية (C_g) بالنسبة لـ (Δ)

$$f(x)-y = (-2x-3)e^{-x}$$

إشارة الفرق هي إشارة $(-2x-3)$ لأن $e^{-x}>0$

$-2x-3=0$ أي $-2x=3$

$x=-\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$-2x-3$		$+$	0	$-$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_g) فوق (Δ)	(C_g) يقطع (Δ)	(C_g) تحت (Δ)	

3/ أ/ بيان أن $f'(x)=g(x)$

لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = -2e^{-x} - e^{-x}(-2x-3)+1$$

$$= e^{-x}(-2-(-2x-3))+1$$

$$= (2x+1)e^{-x}+1$$

$$= g(x)$$

ج/ استنتاج اتجاه تغير f وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا $f'(x)=g(x)$

إذا إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty;\alpha]$

* جدول التغيرات f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4/ بيان أن $f(\alpha)=\alpha+1+\frac{2}{2\alpha+1}$

نثبت أن

$$f(\alpha)-(\alpha+1)-\frac{2}{2\alpha+1}=0$$

$f(\alpha) - \alpha - 1 - \frac{2}{2\alpha+1} =$

$= (-2\alpha-3)e^{-\alpha} + \alpha - \alpha - 1 - \frac{2}{2\alpha+1}$

$= (-2\alpha-3)e^{-\alpha} - \frac{(2\alpha+1)+2}{2\alpha+1}$

$= \frac{-(2\alpha+3)(2\alpha+1)e^{-\alpha} - (2\alpha+3)}{2\alpha+1}$

$= \frac{-(2\alpha+3)\left[(2\alpha+1)e^{-\alpha}+1\right]}{2\alpha+1}$

$= \frac{-(2\alpha+3)\,g(\alpha)}{2\alpha+1} = 0$

حصر لـ $f(\alpha)$

لدينا

$-0,74 < \alpha < -0,73$

$0,26 < \alpha+1 < 0,27 \quad \ldots(1)$

$-1,48 < 2\alpha < -1,46$

$-0,48 < 2\alpha+1 < -0,46$

$-2,08 > \frac{1}{2\alpha+1} > -2,17$

$-4,16 > \frac{2}{2\alpha+1} > -4,34$

$-4,34 < \frac{2}{2\alpha+1} < -4,16 \quad \ldots(2)$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد

$-4,08 < f(\alpha) < -3,89$

5/ تبيان أن (C_g) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

لدينا f' قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$f''(x) = g'(x)$

من الجزء I

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f''(x)=g'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه f'' تنعدم عند $x=\frac{1}{2}$ مغيرة إشارتها ومنه (C_g) يقبل نقطة انعطاف هي

$\omega\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = (-1-3)e^{-\frac{1}{2}} = \frac{-4}{\sqrt{e}}$

6/ إنشاء (C_g) و (Δ) (آخر الموضوع)

7/ تعيين a و b حتى تكون H دالة أصلية لـ h

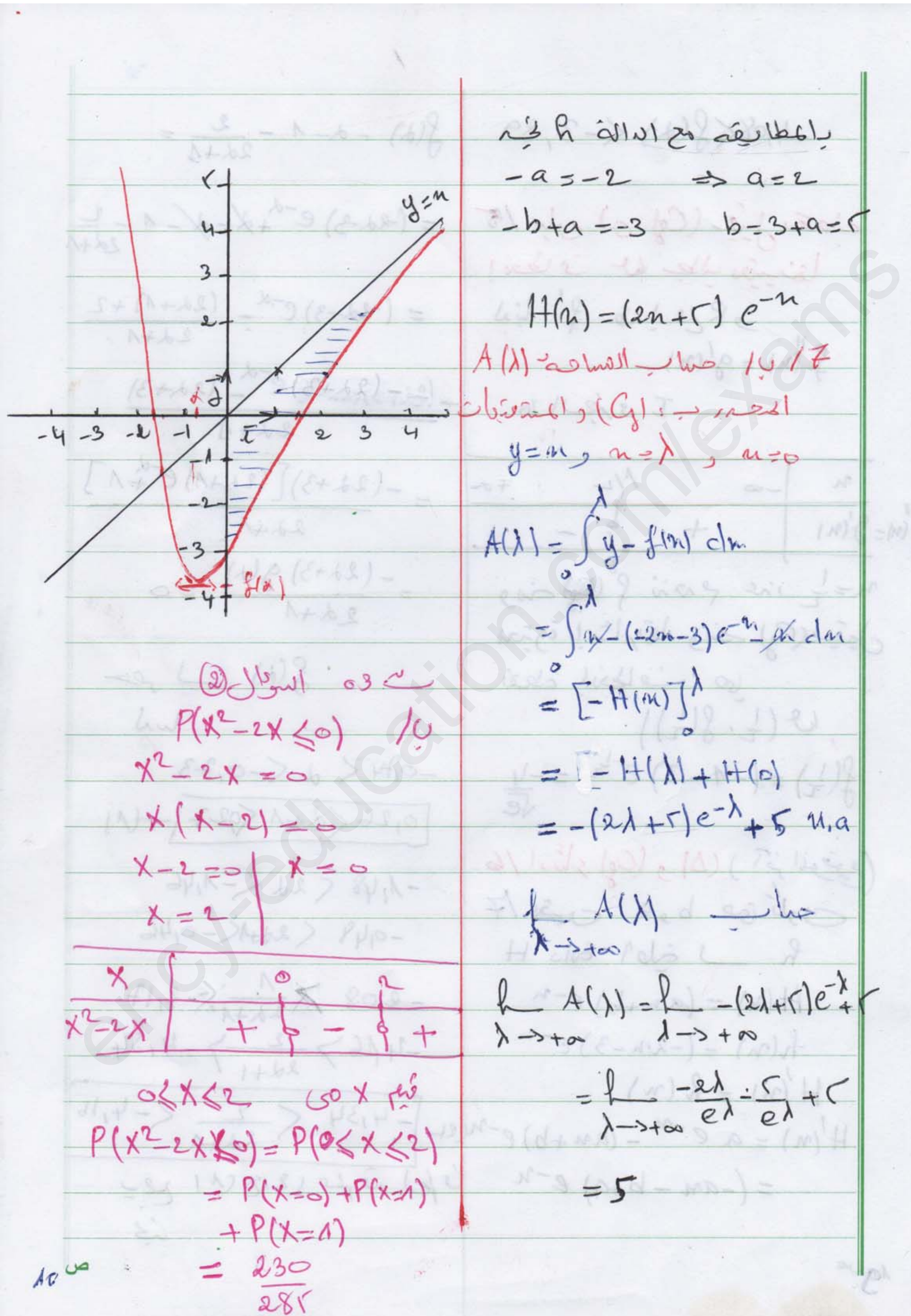
$H(x) = (ax+b)e^{-x}$

$h(x) = (-2x-3)e^{-x}$

$H'(x) = h(x)$

$H'(x) = a e^{-x} - (ax+b)e^{-x}$

$= (-ax-b+a)e^{-x}$



ب من السؤال ②

10/ $P(X^2-2X\leq 0)$

$X^2-2X=0$

$X(X-2)=0$

$X-2=0 \quad | \quad X=0$

$X=2$

x		0		2	
x^2-2x	+	0	−	0	+

قيم X هي $0\leq X\leq 2$

$P(X^2-2X\leq 0)=P(0\leq X\leq 2)$

$=P(X=0)+P(X=1)$
$+P(X=1)$

$=\dfrac{230}{285}$

بالمطابقة مع الدالة h نجد

$-a=-2 \Rightarrow a=2$

$-b+a=-3 \quad b=3+a=5$

$H(x)=(2x+5)e^{-x}$

7/ب/ حساب المساحة $A(\lambda)$

المحدد بـ: (C_f) والمستقيمات

$y=x, \ x=\lambda, \ x=0$

$A(\lambda)=\int_0^\lambda y-f(x)\,dx$

$=\int_0^\lambda x-(2x-3)e^{-x}-x\,dx$

$=[-H(x)]_0^\lambda$

$=[-H(\lambda)+H(0)$

$=-(2\lambda+5)e^{-\lambda}+5 \ u.a$

حساب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty} -(2\lambda+5)e^{-\lambda}+5$

$=\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{-2\lambda}{e^\lambda}-\dfrac{5}{e^\lambda}+5$

$=5$

على التلميذ الإجابة على أحد الموضوعين على الخيار

الموضوع الأول:

التمرين الأول(4 ن):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0=\frac{1}{8}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$

1) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x(2-x)$

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f

ب) بين أنه إذا كان $x\in]0;1[$ فإن $f(x)\in]0;1[$

2) أ) أحسب كلا من u_1 و u_2

ب) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$

جـ) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=1-u_n$

أ) عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n

ب) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

جـ) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$

د) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق : $u_n>1-10^{-20}$

و) احسب بدلالة n الجداء $p(n)$ حيث : $p(n)=v_0\times v_1\times.....\times v_n$ ، ثم عين $\lim_{n\to+\infty}p(n)$

التمرين الثاني(4 ن):

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

2) استنتج باقي قسمة العدد $2020^{1441}+1962^{1954}+1954^{1962}$ على 7

3) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $2020^{3n+1}+1962^{3n+1}+1954^{3n+1}\equiv 0[7]$

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n=1+5+5^2+...+5^n$

أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n، $4S_n=5^{n+1}-1$

ب) نعتبر العدد الطبيعي a ، بين أن $4S_n\equiv a[7]$ إذا و فقط إذا كان $S_n\equiv 2a[7]$

جـ) استنتج باقي قسمة S_{2020} على 7

التمرين الثالث(4ن):

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الأرقام : 0 ؛ 0 ؛ 0 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 2
و كرتين سوداوين تحملان الرقمين : 0 ؛ 1 . (الكرات لا نميز بينها باللمس)

1) نسحب من الكيس عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع
احسب احتمال كلا من الحدثين التاليين
A : الحصول على كرتين من نفس اللون
B : جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين معدوم

2) نسحب الآن كرتين في آن واحد
أ) احسب احتمال الحادثة C : مجموع العددين الذين تحملها الكرتان المسحوبتان عدد أولي
ب) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب ، مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين
*) عين قانون احتمال X ، واحسب أمله الرياضياتي
*) احسب $E\left(X^2\right)$

التمرين الرابع(8 ن):

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $g(x)=2x^2+1-\ln|x|$

1) ادرس تغيرات الدالة g
2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=2x-2+\dfrac{\ln|x|}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. الوحدة $2\,cm$

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف
2) بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
3) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x-2$ مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$
- أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)
4) أحسب $f(-x)+f(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة $\Omega(0,-2)$ ؟
5) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يمر من النقطة Ω و يمس (C_f) في نقطتين A و B يطلب تعيينهما
- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T)
6) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 و الآخر α حيث $-0{,}37<\alpha<-0{,}36$
7) أنشئ كلا من (Δ) ؛ (T) و (C_f)
8) (Δ_m) المستقيمات التي معادلاتها : $y=mx-2$ حيث m وسيط حقيقي
أ- بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها
ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=mx-2$
9) λ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$
أ- احسب بدلالة λ و بـ cm^2 المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ)
و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=\lambda$
ب- عين قيمة العدد الحقيقي λ بحيث يكون : $A(\lambda)=\dfrac{1}{2}cm^2$

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4,5 ن):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_1=\sqrt{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1) أحسب كلا من u_2 ، u_3 و u_4 (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) أ) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ يكون $u_n\leq n+3$

ب) بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $v_n=u_n-n$

بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ، ثم بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$:

$$u_n=n+\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $S_n=\left(\frac{2}{3}\right)v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+......+\left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$ ؛ $S'_n=u_1+u_2+.....+u_n$ و $T_n=\frac{S'_n}{n^2}$

عبر عن S_n و S'_n بدلالة n ثم عين $\lim_{n\to+\infty} T_n$

التمرين الثاني(4,5 ن):

1) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E)............7x-3y=1$

أ- بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا

ب- حل المعادلة (E)

ج- برهن أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن العددين : x و y أوليين فيما بينهما

2) ليكن a و b عددين صحيحين يحققان العلاقة : $(E').......7a-3b=29$

أ- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين : a و b

ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب- عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الصحيحة حلول الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\end{cases}$

ج- ليكن m المضاعف المشترك الأصغر للعددين : a و b

حل الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\\ m=1044\end{cases}$

3) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ pgcd(a;b)=1\end{cases}$

التمرين الثالث(4 ن):

عين في كل حالة مما يلي الإجابة الوحيدة الصحيحة مع التبرير :

1) المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ: $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = 2U_n - n$ حدها العام على $\mathbb{N}$ هو :

أ) $U_n = 2^n + n + 1$ ب) $U_n = 2^n + n + 2$ جـ) $U_n = 2^n - n + 1$

2) (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $2U_{n+1} = U_n + 2000$

نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية العددية (V_n) كما يلي : $V_n = \frac{1}{2}U_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي

إن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ هي :

أ) $\alpha = 1000$ ب) $\alpha = 500$ جـ) $\alpha = -500$

3) إن مجموعة حلول المعادلة $ln(2e^x - 1) = 2x$ في $\mathbb{R}$ هي :

أ) $S = \{0\}$ ب) $S = \{0,1\}$ جـ) $S = \phi$

4) إن $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\left(\frac{e^x - 3}{e^{2x} + 7}\right) + x$ تساوي

أ) e ب) 1 جـ) 0

التمرين الرابع (7ن):

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = 1 + (1 - x)e^x$

1) ادرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0;+\infty[$

3) تحقق أن : $1,27 < \alpha < 1,28$ ، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = \frac{e^x + x + 1}{e^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2\,cm$

1) بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ثم فسر النتيجة بيانيا

2) أ- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ب- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f)

3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث $y = 1$ معادلة لـ (Δ')

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب- بين أن $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5) أ- أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$

ب- أثبت أن (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة $M(-\alpha,0)$ موازيا للمستقيم (Δ)

جـ- اكتب معادلة لـ (T)

6) أنشئ (Δ) ، (Δ') ، (T) و (C_f)

7) m وسيط حقيقي ، ناقش حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $f(x) = x + f(m)$

تصحيح باك تجريبي في الرياضيات
3 ت ر
الموضوع الأول

التمرين الأول (04 ن)

$u_{n+1} = u_n(2-u_n)$ و $u_0 = \frac{1}{8}$

① $D = \mathbb{R}$; $f(x) = x(2-x)$

أ) من أجل كل x من IR : $f'(x) = -2x+2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x+2$		$+$	0	$-$	

f متزايدة تماما على $]0,1[$

ب) من أجل $x\in]0,1[$

$0<x<1$ و f متزايدة تماما على $]0,1[$

$f(0)<f(x)<f(1)$ أي $0<f(x)<1$

أي $f(x)\in]0,1[$

② أ) $u_1 = u_0(2-u_0) = f(u_0) = \frac{15}{64}$

$u_2 = u_1(2-u_1) = f(u_1) = \frac{1695}{4096}$

ب) البرهان بالتراجع أن $0<u_n<1$

$n=0$: $0<u_0=\frac{1}{8}<1$

P(0) صحيحة.

نفرض صحة P(n) : $0<u_n<1$

نبرهن صحة P(n+1) : $0<u_{n+1}<1$ ؟

$0<u_n<1$ و f متزايدة تماما على $]0,1[$

فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$ أي

$0<u_{n+1}<1$ وهو المطلوب

من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$

نقول إن (u_n) محدودة

جـ) من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}-u_n = u_n-u_n^2 = u_n(1-u_n)$

$0<u_n<1$ ومنه $-1<-u_n<0$

ومنه $0<1-u_n<1$ اذن

$u_n(1-u_n)>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$

(u_n) متزايدة تماما.

(*) (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة.

③ $v_n = 1-u_n$

أ) لدينا

$v_{n+1} = 1-u_{n+1}$

$= 1-u_n(2-u_n)$

أي $v_{n+1} = 1-2u_n+u_n^2$

$= (1-u_n)^2 = v_n^2$

ب) البرهان بالتراجع أن : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$n=0$: $v_0 = 1-u_0 = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

و $v_0 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^0} = \left(\frac{7}{8}\right)^1 = \frac{7}{8}$ أي P(0) صحيحة

نفرض صحة P(n) : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

نبرهن صحة P(n+1) : $v_{n+1} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$ ؟

لدينا $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$ ومنه $v_n^2 = \left[\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right]^2$

أي $v_n^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n\times 2}$ أي $v_n^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$

ف $v_{n+1} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$ لأن $v_{n+1} = v_n^2$

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

جـ) استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$v_n = 1-u_n$ تعني $u_n = 1-v_n$

$= 1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} = 1$

$\begin{cases}\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} = 0\end{cases}$ $\left(-1<\frac{7}{8}<1\right)$

د) أصغر عدد طبيعي n يحقق $u_n > 1-10^{-20}$

$1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} > 1-10^{-20}$ تعني $\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} < 10^{-20}$

تعني $\ln\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} < \ln 10^{-20}$ تعني

تعني $2^n \ln\left(\frac{7}{8}\right) < -20\ln 10$ تعني $2^n > \frac{-20\ln 10}{\ln 7/8}$

تعني $\ln 2^n > \ln\left(\frac{-20\ln 10}{\ln 7/8}\right)$ تعني

أي $n\ln 2 > \ln\left(\frac{-20\ln 10}{\ln 7/8}\right)$ ، $n > \frac{\ln\left(\frac{-20\ln 10}{\ln 7/8}\right)}{\ln 2}$

$n > 5{,}11$ ومنه أصغر عدد طبيعي $n=6$

هـ) $P(n) = v_0\times v_1\times \cdots \times v_n$

$= \left(\frac{7}{8}\right)^{2^0}\times\left(\frac{7}{8}\right)^{2^1}\times\cdots\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$= \left(\frac{7}{8}\right)^{2^0+2^1+\cdots+2^n}$

مجموع n+1 حد من متتالية هندسية

$= \left(\frac{7}{8}\right)^{1\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)}$

$P(n) = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}-1}$

$\lim_{n\to+\infty} P(n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}-1} = 0$ $\begin{cases}\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}-1 = +\infty \\ -1<\frac{7}{8}<1\end{cases}$

التمرين ② (04 ن)

① بواقي قسمة 5^n على 7

$5^0\equiv1[7]$ ، $5^1\equiv5[7]$ ، $5^2\equiv4[7]$

$5^3\equiv6[7]$ ، $5^4\equiv2[7]$ ، $5^5\equiv3[7]$

$5^6\equiv1[7]$ البواقي دورية ودورها 6

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]

② استنتاج باقي قسمة $A = 2020^{1441}+1962^{1954}+1954^{1962}$ على 7 لدينا

لدينا $2020\equiv4[7]$ ولدينا من ① $5^2\equiv4[7]$

والخاصية إذا كان $a\equiv b[n]$ و $b\equiv a[n]$

منه $4\equiv5^2[7]$ اذن $2020\equiv5^2[7]$

ومنه $2020^{1441}\equiv(5^2)^{1441}[7]$

$\equiv5^{2882}[7]$

و $2882=6(480)+2$ الشكل $6k+2$

اذن $2020^{1441}\equiv4[7]$

$1962\equiv2[7]$ ولدينا من ① $5^4\equiv2[7]$

ومنه $2\equiv5^4[7]$ اذن $1962\equiv5^4[7]$

اذن $1962^{1954}\equiv(5^4)^{1954}[7]$

$\equiv5^{7816}[7]$

و $7816=6(1302)+4$ الشكل $6k+4$

اذن $1962^{1954}\equiv2[7]$

$1954\equiv1[7]$ منه $1954^{1962}\equiv1[7]$

اذن $A\equiv4+2+1[7]$

$\equiv0[7]$

الباقي هو 0

③ من أجل كل عدد طبيعي n :

$2020^{3n+1}+1962^{3n+1}+1954^{3n+1}\equiv0[7]$ ؟

$2020\equiv5^2[7]$ منه $2020^{3n+1}\equiv(5^2)^{3n+1}[7]$

$\equiv5^{6n+2}[7]$

$\equiv4[7]$

$1962\equiv5^4[7]$ منه $1962^{3n+1}\equiv(5^4)^{3n+1}[7]$

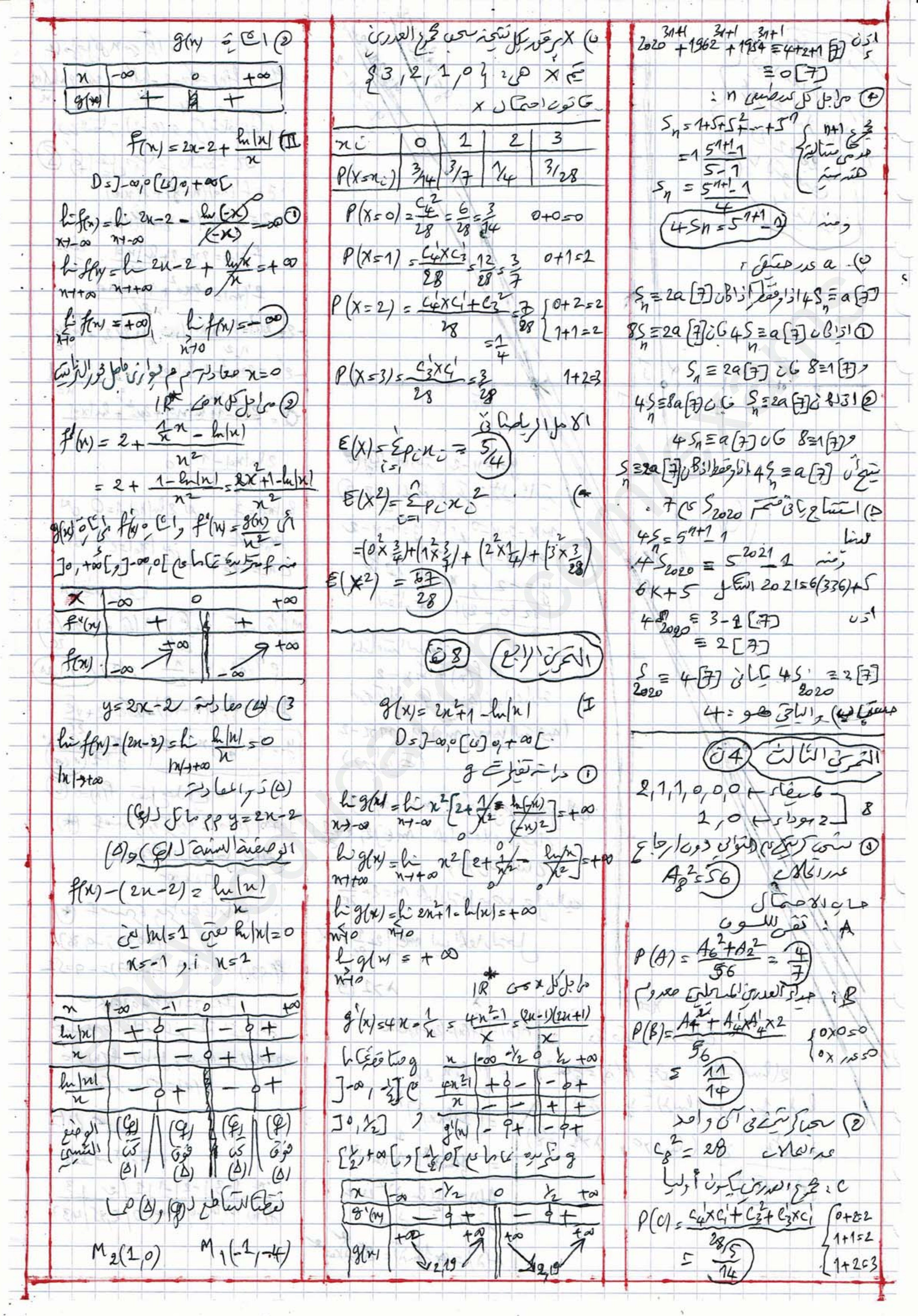
$\equiv5^{12n+4}[7]$

$\equiv(5^{6n+2})^2[7]$

$\equiv4^2[7]$

$\equiv2[7]$

$1954\equiv1[7]$ منه $1954^{3n+1}\equiv1[7]$



اذن $2020^{3n+1}+1962^{3n+1}+1954^{3n+1} \equiv 4+2+1 [7]$

$\equiv 0 [7]$

4) من أجل كل عدد طبيعي n:

$S_n = 1+5+5^2+\dots+5^n$ مجموع $n+1$ حدود متتالية من متتالية هندسية

$= 1\,\frac{5^{n+1}-1}{5-1}$

$S_n = \frac{5^{n+1}-1}{4}$

ومنه $4S_n = 5^{n+1}-1$

ب) a عدد حقيقي:

$S_n \equiv 2a [7]$ إذا وفقط إذا $4S_n \equiv a [7]$

1) إذا كان $4S_n \equiv a [7]$ فإن $8S_n \equiv 2a [7]$

و $8 \equiv 1 [7]$ فإن $S_n \equiv 2a [7]$

2) إذا كان $S_n \equiv 2a [7]$ فإن $4S_n \equiv 8a [7]$

و $8 \equiv 1 [7]$ فإن $4S_n \equiv a [7]$

نستنتج أن $S_n \equiv 2a [7]$ إذا وفقط إذا $4S_n \equiv a [7]$

ج) استنتاج باقي قسمة S_{2020} على 7.

لدينا $4S_n = 5^{n+1}-1$

ومنه $4S_{2020} = 5^{2021}-1$

كل $2021 = 6(336)+5$ الشكل $6k+5$

اذن $4S_{2020} \equiv 3-1 [7]$

$\equiv 2 [7]$

$S_{2020} \equiv 4 [7]$ يكافئ $4S_{2020} \equiv 2 [7]$

ومنه الباقي هو : 4

التمرين الثالث (04)

6 بيضاء ← 2, 1, 1, 0, 0, 0

2 سوداء ← 1, 0

8

1) نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع

عدد الحالات: $A_8^2 = 56$

حساب الاحتمال

A: نفس اللون

$P(A) = \frac{A_6^2 + A_2^2}{56} = \frac{4}{7}$

B: جداء العددين المسجلين معدوم:

$P(B) = \frac{A_4^2 + A_4^1 A_4^1 \times 2}{56}$

$\begin{cases} 0\times 0 = 0 \\ 0 \times \text{عدد} \end{cases}$

$= \frac{11}{14}$

2) نسحب كرتين في آن واحد

عدد الحالات $C_8^2 = 28$

C: مجموع العددين يكون أوليا

$P(C) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 + C_3^2 + C_3^1 \times C_1^1}{28}$

$\begin{cases} 0+2=2 \\ 1+1=2 \\ 1+2=3 \end{cases}$

$= \frac{5}{14}$

ب) X يرفق بكل نتيجة سحب مجموع العددين

قيم X هي $\{3, 2, 1, 0\}$

قانون احتمال X

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{28}$

$P(X=0) = \frac{C_4^2}{28} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$ $\quad 0+0=0$

$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ $\quad 0+1=2$

$P(X=2) = \frac{C_4^1 \times C_1^1 + C_3^2}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ $\quad \begin{cases} 0+2=2 \\ 1+1=2 \end{cases}$

$P(X=3) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{28} = \frac{3}{28}$ $\quad 1+2=3$

الأمل الرياضياتي

$E(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i x_i = \frac{5}{4}$

$E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} p_i x_i^2$

$= (0^2 \times \frac{3}{14}) + (1^2 \times \frac{3}{7}) + (2^2 \times \frac{1}{4}) + (3^2 \times \frac{3}{28})$

$E(X^2) = \frac{67}{28}$

التمرين الرابع (08)

I) $g(x) = 2x^2+1-\ln|x|$

$D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

1) دراسة تغيرات g

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left[2+\frac{1}{x^2} - \frac{\ln(-x)}{(-x)^2}\right] = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left[2+\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right] = +\infty$

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} 2x^2+1-\ln|x| = +\infty$

$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

$g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2-1}{x} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2-1$		+	0	−	‖	−	0	+	
x		−		−	‖	+		+	
$g'(x)$		−	0	+	‖	−	0	+	

g متناقصة على $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ و $]0, \frac{1}{2}]$

و متزايدة تماما على $[-\frac{1}{2}, 0[$ و $[\frac{1}{2}, +\infty[$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	‖	−	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	2,19	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2,19	↗	$+\infty$

---

2) إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	‖	+

II) $f(x) = 2x-2+\frac{\ln|x|}{x}$

$D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x-2 - \frac{\ln(-x)}{(-x)} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x-2+\frac{\ln x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$x=0$ معادلة مستقيم مقارب موازي لحامل محور التراتيب

2) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = 2 + \frac{\frac{1}{x}x - \ln|x|}{x^2}$

$= 2 + \frac{1-\ln|x|}{x^2} = \frac{2x^2+1-\ln|x|}{x^2}$

أي $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

منه f متزايدة تماما على $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3) (Δ) معادلته $y = 2x-2$

$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-(2x-2) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$

(Δ) ذو المعادلة $y=2x-2$ م م مائل لـ (φ)

الوضعية النسبية لـ (φ) و (Δ)

$f(x)-(2x-2) = \frac{\ln|x|}{x}$

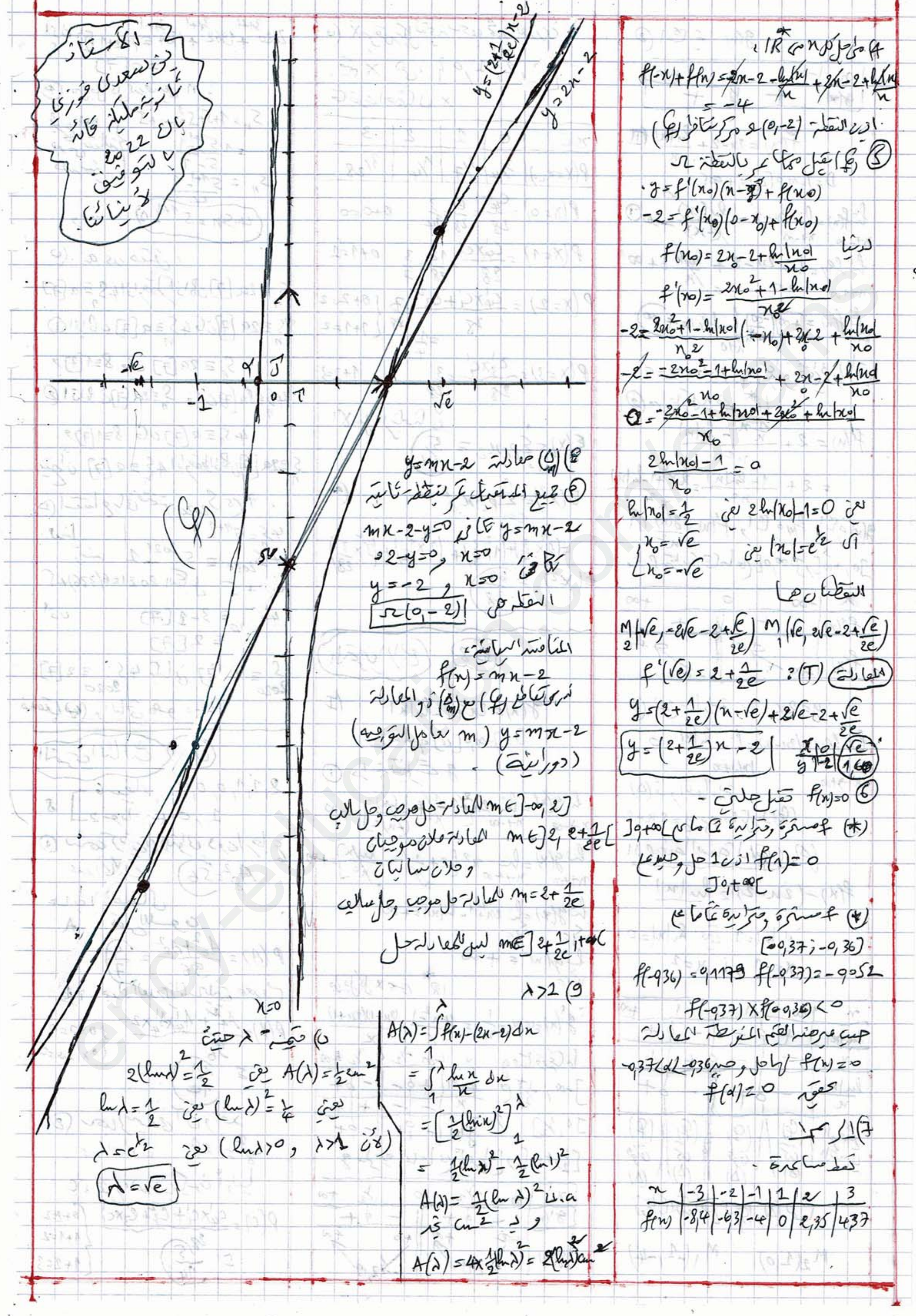
$\ln|x| = 0$ تعني $|x| = 1$ تعني

$x=1$ أو $x=-1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\ln\|x\|$		+	0	−	‖	−	0	+	
x		−		−	0	+		+	
$\frac{\ln\|x\|}{x}$		−	0	+	‖	−	0	+	
الوضع النسبي		(φ) تحت (Δ)		(φ) فوق (Δ)	‖	(φ) تحت (Δ)		(φ) فوق (Δ)	

نقطتا التقاطع لـ (φ) و (Δ) هما

$M_1(-1, -4)$ ، $M_2(1, 0)$



من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$f(-x)+f(x) = -2x-2-\frac{\ln|x|}{x}+2x-2+\frac{\ln|x|}{x} = -4$

إذن النقطة $(0,-2)$ مركز تناظر (C_f)

3) (C_f) يقبل مماسا يمر بالنقطة Ω

$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$-2 = f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$

لدينا $f(x_0) = 2x_0-2+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$

$f'(x_0) = \frac{2x_0^2+1-\ln|x_0|}{x_0^2}$

$-2 = \frac{2x_0^2+1-\ln|x_0|}{x_0^2}(-x_0)+2x_0-2+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$

$-2 = \frac{-2x_0^2-1+\ln|x_0|}{x_0}+2x_0-2+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$

$0 = \frac{-2x_0^2-1+\ln|x_0|+2x_0^2+\ln|x_0|}{x_0}$

$\frac{2\ln|x_0|-1}{x_0} = 0$

يعني $2\ln|x_0|-1=0$ يعني $\ln|x_0| = \frac{1}{2}$

أي $|x_0| = e^{\frac{1}{2}}$ يعني $x_0=\sqrt{e}$ أو $x_0=-\sqrt{e}$

النقطتان هما

$M_1\left(\sqrt{e},\ 2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e}\right)$ ، $M_2\left(-\sqrt{e},\ -2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e}\right)$

المعادلة (T) : $f'(\sqrt{e}) = 2+\frac{1}{2e}$

$y = \left(2+\frac{1}{2e}\right)(x-\sqrt{e})+2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e}$

$y = \left(2+\frac{1}{2e}\right)x-2$

x	0	$\sqrt{e}$
y	-2	1,6

6) $f(x)=0$ تقبل حلين.

(*) f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,+\infty[$ و $f(1)=0$ إذن 1 حل وحيد في $]0,+\infty[$

(*) f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-0,37\,;-0,36]$

$f(-0,36)=0,1179$ ، $f(-0,37)=-0,052$

$f(-0,37)\times f(-0,36)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $-0,37<\alpha<-0,36$ ، $f(\alpha)=0$

7) الرسم

نقط مساعدة.

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	-8,4	-6,3	-4	0	2,35	4,37

8) معادلة (D_m) : $y=mx-2$

جميع المستقيمات تمر بنقطة ثابتة

$y=mx-2$ أي $mx-2-y=0$

نجد $x=0$ و $-2-y=0$

$x=0$ و $y=-2$

النقطة هي $\Omega(0,-2)$

المناقشة البيانية

$f(x)=mx-2$

ندرس تقاطع (C_f) مع (D_m) ذو المعادلة $y=mx-2$ (m معامل التوجيه) (دورانية).

$m\in]-\infty,2]$ المعادلة حل موجب وحل سالب

$m\in]2,\ 2+\frac{1}{2e}[$ المعادلة حلان موجبان وحلان سالبان

$m=2+\frac{1}{2e}$ المعادلة حل موجب وحل سالب

$m\in]2+\frac{1}{2e},+\infty[$ ليس للمعادلة حل

9) $\lambda>1$

$A(\lambda)=\int_1^{\lambda} f(x)-(2x-2)\,dx$

$=\int_1^{\lambda}\frac{\ln x}{x}\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\lambda}$

$=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2$

$A(\lambda)=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2$ u.a

وبـ cm^2 نجد

$A(\lambda)=4\times\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2=2(\ln\lambda)^2\,cm^2$

تعيين λ حيث

$A(\lambda)=\frac{1}{2}cm^2$ يعني $2(\ln\lambda)^2=\frac{1}{2}$

يعني $(\ln\lambda)^2=\frac{1}{4}$ يعني $\ln\lambda=\frac{1}{2}$

(لأن $\lambda>1$ و $\ln\lambda>0$) يعني $\lambda=e^{1/2}$

$\lambda=\sqrt{e}$

تصحيح الاختبار التجريبي في الرياضيات

3 ت ر

الموضوع الثاني.

التمرين 01 (04,5)

$u_1=\sqrt{e}$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1) $u_2=\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}+1=2,43$

$u_3=\frac{2}{3}u_2+\frac{2}{3}+1=3,29$

$u_4=\frac{2}{3}u_3+\frac{3}{3}+1=4,19$

التخمين: (u_n) متزايدة

2) أ) البرهان بالتراجع: $n\geq 1$: $u_n\leq n+3$

$n=1$: $u_1=\sqrt{e}$ ، $1+3=4$

$\sqrt{e}\leq 4$ و $P(1)$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة: $u_n\leq n+3$

نبرهن صحة $P(n+1)$: $u_{n+1}\leq n+4$ ؟

$u_n\leq n+3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n\leq\frac{2}{3}n+2$

منه $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\leq\frac{2}{3}n+2+\frac{1}{3}n+1$

منه $u_{n+1}\leq n+3$

و $n+3<n+4$

اذن $u_{n+1}\leq n+4$

من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$; $u_n\leq n+3$

ب) من أجل كل $n\geq 1$

$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n$

$=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

$=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$

لأن $u_n\leq n+3$ يعني $n+3-u_n\geq 0$

ومنه $u_{n+1}-u_n\geq 0$ أي (u_n) متزايدة

3) من أجل كل $n\geq 1$: $v_n=u_n-n$

(v_n) هندسية يعني $v_{n+1}=v_n\times q$

$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)$

$=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1$

$=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n$

$=\frac{2}{3}(u_n-n)=\frac{2}{3}v_n$

(v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ ، حدها الأول $v_1=u_1-1=\sqrt{e}-1$

ب) نبين أن: $u_n=n+(\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ؟

لدينا أن $v_n=v_1\times q^{n-1}$

$=(\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

لدينا $v_n=u_n-n$ أي $u_n=v_n+n$ ومنه

$u_n=n+(\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

4) $S_n=\frac{2}{3}v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n$

نضع $w_n=\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n$

لدينا $w_{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}v_{n+1}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\times\frac{2}{3}v_n$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}v_n$

$=\frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n\right]=\frac{4}{9}w_n$

(w_n) هندسية أساسها $q'=\frac{4}{9}$ حدها الأول $w_1=\frac{2}{3}v_1=\frac{2}{3}(\sqrt{e}-1)$

$S_n=w_1+w_2+\dots+w_n$

$=w_1\left[\frac{1-q'^n}{1-q'}\right]$

$=\frac{2}{3}(\sqrt{e}-1)\left[\frac{1-(4/9)^n}{1-4/9}\right]$

$S_n=\frac{6}{5}(\sqrt{e}-1)\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$

$S'_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ $[u_n=v_n+n]$

$=(v_1+1)+(v_2+2)+\dots+(v_n+n)$

$=(v_1+v_2+\dots+v_n)+(1+2+\dots+n)$ حسابية

$=v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$

$=(\sqrt{e}-1)\left(\frac{1-(2/3)^n}{1-2/3}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$

$S'_n=3(\sqrt{e}-1)(1-(2/3)^n)+\frac{n(n+1)}{2}$

$\lim_{n\to+\infty}T_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{S'_n}{n^2}$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3(\sqrt{e}-1)(1-(2/3)^n)}{n^2}+\frac{n(n+1)}{2n^2}$

$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

التمرين الثاني (04,5)

1) (E) : $7y-3x=1$

أ) لدينا $PGCD(7,3)=1$ ، $1|1$

فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) حل المعادلة (E)

لدينا $(1,2)$ حل لـ (E) لأن $7(1)-3(2)=1$ ومنه

$\begin{cases}7x-3y=1\\7(1)-3(2)=1\end{cases}$ أي $7x-3y=7(1)-3(2)$

نجد $7(x-1)=3(y-2)$

$7|3(y-2)$ و $PGCD(7,3)=1$

حسب غوص $7|y-2$ أي $y-2=7k$

ومنه $y=7k+2$

و $7(x-1)=3(7k)$ أي $x-1=3k$ ومنه $x=3k+2$

$S=\{(3k+1,7k+2),k\in\mathbb{Z}\}$

ج) اذا كانت (x,y) حلا لـ (E) هذا يعني $7x-3y=1$ ، حسب نظرية بيزو تكون x و y أوليين فيما بينهما

2) a,b عددان صحيحان طبيعيان

(E') : $7a-3b=29$

أ) $PGCD(a,b)=d$

$\begin{cases}d|a\\d|b\end{cases}$ لدينا $\begin{cases}d|7a\\d|3b\end{cases}$

ومنه $d|7a-3b$ أي $d|29$

منه $d\in\{1,29\}$

ب) الثنائيات الصحيحة (a,b) حيث

$\begin{cases}7a-3b=29\\d=29\end{cases}$

لدينا $d=29$ يعني يوجد a' و b' صحيحان $a=29a'$ و $b=29b'$ حيث $PGCD(a',b')=1$ لدينا

$7(29a')-3(29b')=29$

أي $7a'-3b'=1$

ومن السؤال 1) ب) نجد

$a'=3k+1$ ، $b'=7k+2$

اذن $a=87k+29$

$b=203k+58$

$S=\{(87k+29,203k+58)/k\in\mathbb{Z}\}$

ج) $PPCM(a,b)=m$

$m=\frac{a\times b}{d}=\frac{29a'\times 29b'}{29}=29a'b'$



لدينا الجملة
$$\begin{cases} 7a-3b=29 \\ d=29 \\ m=1044 \end{cases}$$
أي

$a'\times b'\times 29=1044$ يعني $a'\times b'=36$

$7a-3b=29$ تكافئ $7a'-3b'=1$

$a'\times b'=36$ تكافئ $a'=\frac{36}{b'}$ ومنه

$7\left(\frac{36}{b'}\right)-3b'=1$

تكافئ $\frac{-3b'^2+252}{b'}=1$

تكافئ $-3b'^2-b'+252=0$

$\Delta=3025$ ، $b'_1=9$ مقبول ، $b'_2=\frac{-28}{3}$ مرفوض

$b'=9$ يكافئ $a'=4$ ومنه

$a=116$, $b=261$

$S=\{(116,261)\}$

③ حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
$$\begin{cases} 7a-3b=29 \\ PGCD(a,b)=1 \end{cases}$$

$7a-3b=29$ تكافئ $7a=29+3b$

$7a\equiv 29[3]$ تكافئ $a\equiv 2[3]$

أي $a=3\alpha+2$ ومنه

أي $7(3\alpha+2)=29+3b$

أي $7(3\alpha)-15=3b$

$7\alpha-5=b$

$b=7\alpha-5$ $(\alpha\in\mathbb{Z})$

لدينا $PGCD(a,b)=1$

باستعمال خوارزمية اقليدس لدينا

$PGCD(a,b)=PGCD(b,r)$

$7\alpha-5=2(3\alpha+2)+\alpha-9$

$3\alpha+2=3(\alpha-9)+29$

$PGCD(7\alpha-5,3\alpha+2)=PGCD(\alpha-9,29)$

ولدينا $PGCD(a,b)=1$

يعني $PGCD(\alpha-9,29)=1$

أي $\alpha-9\not\equiv 0[29]$ أي $\alpha\not\equiv 9[29]$

$S=\{(3\alpha+2,7\alpha-5);\ \alpha\in\mathbb{Z},\ \alpha\not\equiv 9[29]\}$

التمرين الثالث (4ن)

① $u_0=2$ و $u_{n+1}=2u_n-n$

نبرهن بالتراجع أن (P): $u_n=2^n+n+1$

$u_{n+1}-2u_n=2^{n+1}+n+1+1-2(2^n+n+1)$

$=2^{n+1}+n+2-2^{n+1}-2n-2$

$=-n$

② $v_n=\frac{1}{2}u_n-\alpha$ و $2u_{n+1}=u_n+2000$

تعيين α هي $(\alpha=1000)$

$v_{n+1}=\frac{1}{2}u_{n+1}-\alpha$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_n+1000\right)-\alpha$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}u_n+1000-2\alpha\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_n-\alpha+1000-\alpha\right)$

$=\frac{1}{2}v_n+\frac{1000-\alpha}{2}$

(v_n) هندسية يكفي أن يكون $1000-\alpha=0$ ومنه $\alpha=1000$

③ تحديد حلول المعادلة $\ln(2e^x-1)=2x$ هي $S=\{0\}$

لأن المعادلة معرفة حين $2e^x-1>0$

أي $2e^x>1$ أي $e^x>\frac{1}{2}$

أي $x>\ln\frac{1}{2}$ ، $D=]\ln\frac{1}{2};+\infty[$

$\ln(2e^x-1)=2x$ تكافئ $2e^x-1=e^{2x}$

تكافئ $e^{2x}-2e^x+1=0$ أي

$(e^x-1)^2=0$ تكافئ $e^x-1=0$

أي $e^x=1$ أي $x=0$

④ $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+x$

تساوي 0 لأن

$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+x=$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+\ln(e^x)$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\times e^x\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}-3e^x}{e^{2x}+7}\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}(1-3e^{-x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})}\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1-3e^{-x}}{1+e^{-2x}}\right)$

$=\ln 1=0$

التمرين الرابع (7ن)

I) $g(x)=1+(1-x)e^x$ ، $D=]-\infty;+\infty[$

① دراسة تغيرات g

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}1+e^x-xe^x=1$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$g'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-x$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$			
$g(x)$	1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

② لدينا g مستمرة ومتناقصة تماما على $[0;+\infty[$ و $2\times\lim_{x\to+\infty}g(x)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0;+\infty[$

③ لدينا $g(1,27)=0,0038$ ؛ $g(1,28)=-0,007$

إذن $g(1,27)\times g(1,28)<0$

$g(\alpha)=0$ يعني $1,27<\alpha<1,28$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) $f(x)=\frac{e^x+x+2}{e^x+1}$

$D=]-\infty,+\infty[$

① $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$

$=1$

يعني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=1$

2) أ) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}=-\infty$

ب) $\lim_{x\to-\infty}f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}-(x+1)$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1-xe^x-e^x-x-1}{e^x+1}$

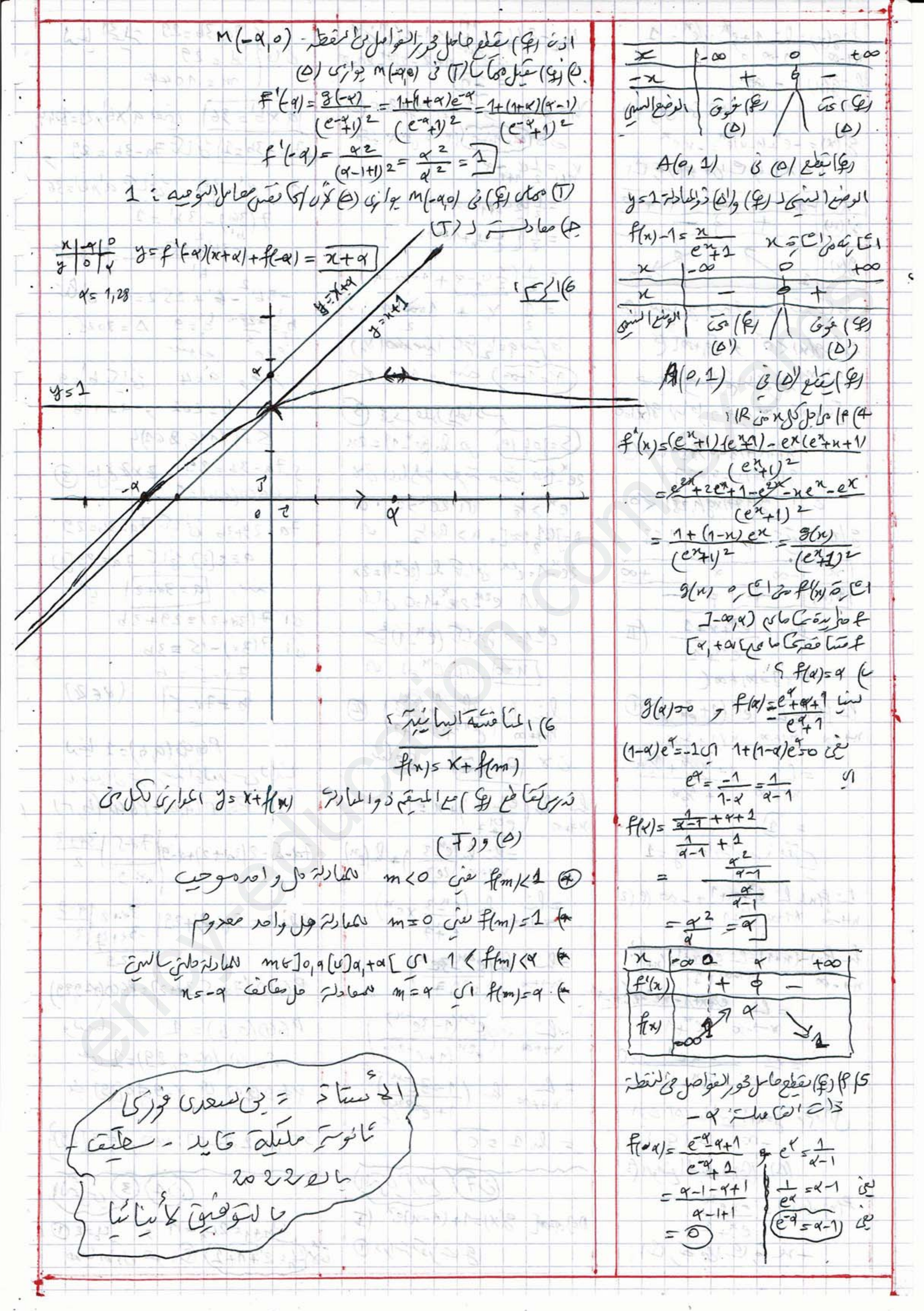
$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^x}{e^x+1}=0$

إذن (Δ) معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

3) الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

$f(x)-(x+1)=\frac{-xe^x}{e^x+1}$

الإشارة من إشارة $-x$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(Cf) فوق (Δ)		(Cf) تحت (Δ)

(Cf) يقطع (Δ) في $A(0,1)$

الوضع النسبي لـ (Cf) و (Δ') ذو المعادلة $y=1$

$f(x)-1=\frac{x}{e^x+1}$ إشارته من إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(Cf) تحت (Δ')		(Cf) فوق (Δ')

(Cf) يقطع (Δ') في $A(0,1)$

4) أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)(e^x+1)-e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+2e^x+1-e^{2x}-xe^x-e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{1+(1-x)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

f متزايدة تماما على $]-\infty,\alpha]$

f متناقصة تماما على $[\alpha,+\infty[$

ب) $f(\alpha)=\alpha$ ؟

لدينا $f(\alpha)=\frac{e^\alpha+\alpha+1}{e^\alpha+1}$ و $g(\alpha)=0$

يعني $1+(1-\alpha)e^\alpha=0$ أي $(1-\alpha)e^\alpha=-1$

أي $e^\alpha=\frac{-1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$

$$f(\alpha)=\frac{\frac{1}{\alpha-1}+\alpha+1}{\frac{1}{\alpha-1}+1}=\frac{\frac{\alpha^2}{\alpha-1}}{\frac{\alpha}{\alpha-1}}=\frac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	α	↘ 1

5) أ) (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$

$f(-\alpha)=\frac{e^{-\alpha}-\alpha+1}{e^{-\alpha}+1}$ و $e^\alpha=\frac{1}{\alpha-1}$ يعني $\frac{1}{e^\alpha}=\alpha-1$ يعني $e^{-\alpha}=\alpha-1$

$$=\frac{\alpha-1-\alpha+1}{\alpha-1+1}=0$$

إذن (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $M(-\alpha,0)$

ب) (Cf) يقبل مماسا (T) في $M(-\alpha,0)$ يوازي (Δ)

$$f'(-\alpha)=\frac{g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)e^{-\alpha}}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)(\alpha-1)}{(e^{-\alpha}+1)^2}$$

$$f'(-\alpha)=\frac{\alpha^2}{(\alpha-1+1)^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2}=1$$

(T) مماس (Cf) في $M(-\alpha,0)$ يوازي (Δ) لأن لهما نفس معامل التوجيه: 1

جـ) معادلة لـ (T)

$$y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(-\alpha)=x+\alpha$$

x	$-\alpha$	0
y	0	α

$\alpha\approx 1{,}28$

6) أ) الرسم

6) المناقشة البيانية:

$$f(x)=x+f(m)$$

ندرس تقاطع (Cf) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+f(m)$ الموازي لكل من (Δ) و (T)

* $f(m)<1$ يعني $m<0$ للمعادلة حل واحد موجب
* $f(m)=1$ يعني $m=0$ للمعادلة حل واحد معدوم
* $1<f(m)<\alpha$ أي $m\in]0,\alpha[\cup]\alpha,+\infty[$ للمعادلة حلان سالبان
* $f(m)=\alpha$ أي $m=\alpha$ للمعادلة حل مضاعف $x=-\alpha$

الأستاذ: بن لسعدي فوزي
ثانوية مليكة قايد - سطيف
سنة 2022م
بالتوفيق لأبنائنا

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان البكالوريا التجريبي | دورة: ماي 2022

شعبة: العلوم التجريبية | ثانوية عياش مقلاتي الحاسي+ثانوية بوكميش الحواس اولاد سي سليمان

اختبار في مادة: الرياضيات | المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضـــــــوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $\begin{cases} u_1 = \ln(2) \\ u_{n+1} = \ln\left(2 - e^{-u_n}\right) \end{cases}$.

1. أ) تحقق أن: $u_2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ و $u_3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n > 0$.

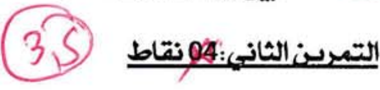
2. أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 - e^{-u_n} - e^{u_n} = -e^{-u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)^2$ ثم استنتج أن: $2 - e^{-u_n} < e^{u_n}$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

3. برهن بالتراجع من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4. نعتبر الجداء P بحيث: $P = e^{u_1} \times e^{u_2} \times ...... \times e^{u_{2021}}$.

✓ بين أن: $P = 2022$



التمرين الثاني: 04 نقاط

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1. نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x) = 1443 - 2022x$.

✓ الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = 2x\ln(x)$.

✓ الدالة الأصلية للدالة h والتي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة H المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $H(x) = x^2\ln(x)$.

3. المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $w_n = \frac{\ln(n)}{e^n}$ متقاربة.

4. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $g(x) = x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

✓ الدالة g زوجية.

التمرين الثالث: 05 نقاط

يحتوي كيس على سبع كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات خضراء.

I. نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الكيس.

1. احسب احتمال كل من الحادثتين A و B بحيث A: عدد الكريات البيضاء المسحوبة أكبر تماما من عدد الكريات الخضراء المسحوبة و B: الحصول على كريتين بالضبط من نفس اللون.
2. احسب $P\left(A\cap B\right)$ ثم استنتج كلا من $P_A\left(B\right)$ و $P\left(A\cup B\right)$.

II. نسحب الآن ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس.

1. عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.
2. احسب الأمل الرياضياتي $E\left(X\right)$ للمتغير العشوائي X، ثم استنتج $E\left(1743X-1962\right)$.



التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g\left(x\right)=2e^{x-1}-x-1$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)$، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
2. أ) بين أن المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 والآخر α بحيث $-0,6<\alpha<-0,5$.

   ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g\left(x\right)$.

II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=2x-2+\left(x+2\right)e^{1-x}$ و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$.

   ب) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'\left(x\right)=e^{1-x}g\left(x\right)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

   ج) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f''\left(x\right)=xe^{1-x}$، ثم استنتج أن $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتيها.
2. بين أن $f\left(\alpha\right)=2\alpha+\dfrac{2}{\alpha+1}$، ثم اعط حصرا لـ $f\left(\alpha\right)$.
3. أ) بين أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ ذا المعادلة $y=2x-2$ مقارب مائل لـ $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي لـ $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta\right)$.

   ب) بين أن $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا $\left(T\right)$ موازيا لـ $\left(\Delta\right)$ يطلب كتابة معادلة له.
4. أ) أنشئ كلا من $\left(\Delta\right)$، $\left(T\right)$ ثم مثل $\left(C_f\right)$. نقبل أن $f\left(\beta\right)=0$ بحيث $-1,63<\beta<-1,61$

   ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f\left(x\right)=2(x-1)+m$ حلين مختلفين في الإشارة.
5. أ) بين أن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H\left(x\right)=\left(-x-3\right)e^{1-x}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\left(x+2\right)e^{1-x}$ على $\mathbb{R}$.

   ب) استنتج A مساحة الحيز المحدد بـ: $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta\right)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=-2$ و $x=1$.

انتهـــــــى الموضوع الأول

الموضـــــوع الثانـــــي

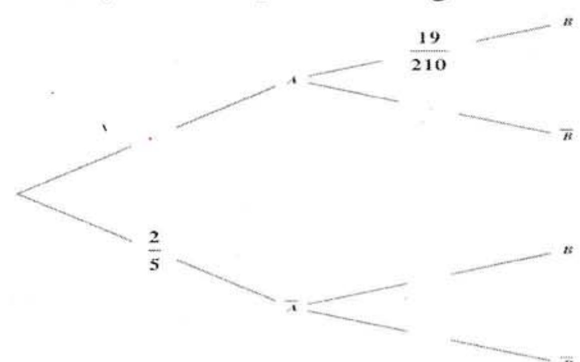
التمرين الأول: 5 نقاط

يحتوي وعاء U على 10 كريات منها خمس كريات حمراء مرقمة بـ: -2 ، -1 ، 0 ، 1 ، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -1 ، 0 ، 1 و كريتين سوداوين مرقمتين بـ: -1 ، 1 و يحتوي وعاء V على 9 كريات موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة بـ: $2,2,2,1,1$ و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: $-3,2,3$ و كرية سوداء مرقمة بـ: -1 ، و يحتوي وعاء W على خمس كريات منها ثلاث كريات بيضاء و كريتين صفراوين.

نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كريات من أحد الوعاءين U أو V بالكيفية التالية:

نقوم بسحب كرية واحدة عشوائيا من الوعاء W، إذا تحصلنا على كرية بيضاء نسحب الكريات الأربعة من U و إذا تحصلنا على كرية صفراء نسحب الكريات الأربعة من V.

نسمي A الحدث: الحصول على كرية بيضاء، و نسمي B الحدث الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم.



1. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها موضحا طريقة الحساب.
2. استنتج $P(B)$ ثم احسب $P_{\overline{B}}(A)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة .

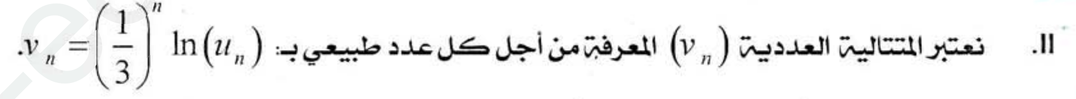
عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

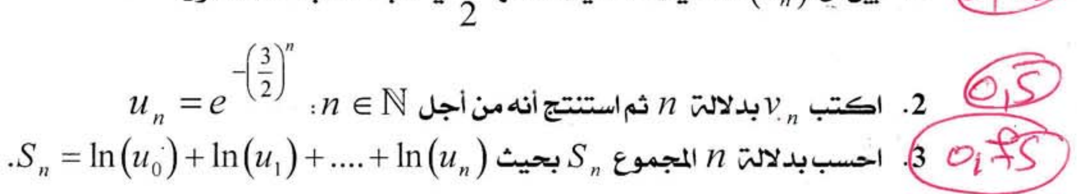
I. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول: $u_0 = e^{-1}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n\sqrt{u_n}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 1$.
2. أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.



II. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ: $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \ln(u_n)$.



1. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.
2. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$
3. احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + ... + \ln(u_n)$.

التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $D = [0;\ln 2]$ بـ: $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$ ، $g(x) = \frac{1}{e^x+1}$ ، و ليكن

(C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

نضع $I=\int_0^{\ln 2} f(x)dx$ و $J=\int_0^{\ln 2} g(x)dx$.

1. بين أنه من أجل $x\in D$: $\frac{1}{3}\le g(x)\le \frac{1}{2}$، ثم أعط حصرا للتكامل J.

2. أثبت أن $I-J=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx$، ثم استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=\ln 2$ و $x=0$.

3. أ) تحقق أنه من أجل $x\in D$: $f(x)=e^x-\frac{e^x}{e^x+1}$، ثم احسب التكامل I.

ب) استنتج قيمة التكامل J، ثم فسر النتيجة هندسيا.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-1-\ln x$.

1. احسب $\lim_{x\to 0} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2. احسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$..

II. الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln x+\frac{2+\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

ج) استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتيها.

2. ليكن (P) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$.

أ. احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب. ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (P).

3. أ) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α بحيث $0{,}17<\alpha<0{,}19$، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$.

ب) ارسم (P) ثم ارسم (C_f).

4. ادرس اتجاه تغير الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=[f(x)]^2$ دون تعيين عبارتها.

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح لنموذج اختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

الشعبة: علوم تجريبية

الإجابة	العلامة

الموضوع الأول

حل التمرين الأول:

لدينا
$$\begin{cases} U_1 = \ln 2 \\ U_{n+1} = \ln(2 - e^{-U_n}) \end{cases}$$

1) أ/ التحقق أن $U_2 = \ln\frac{3}{2}$ و $U_3 = \ln\frac{4}{3}$

لدينا: $U_2 = \ln(2 - e^{-U_1}) = \ln(2 - e^{-\ln 2}) = \ln\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{2}$

$U_3 = \ln(2 - e^{-U_2}) = \ln\left(2 - e^{-\ln\frac{3}{2}}\right) = \ln\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \ln\frac{4}{3}$.

ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n > 0$

لدينا $U_1 = \ln\frac{3}{2}$ و $\ln\frac{3}{2} > 0$ ومنه $U_1 > 0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أنه من أجل $n \geq 1$: $U_n > 0$ ونبرهن أن $U_{n+1} > 0$

لدينا $U_n > 0$ أي $-U_n < 0$ ومنه $e^{-U_n} < 1$ ومنه $-e^{-U_n} > -1$

ومنه $2 - e^{-U_n} > 1$ وبالتالي $\ln(2 - e^{-U_n}) > 0$

وبالتالي $U_{n+1} > 0$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع: $U_n > 0$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$.

2) أ/ تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 - e^{-U_n} - e^{U_n} = -e^{-U_n}(e^{U_n} - 1)^2$

لدينا
$$2 - e^{-U_n} - e^{U_n} = -e^{-U_n}\left(-\frac{2}{e^{-U_n}} + 1 + \frac{e^{U_n}}{e^{-U_n}}\right)$$

ومنه:
$$= -e^{-U_n}\left(e^{2U_n} - 2e^{U_n} + 1\right)$$

وبالتالي:
$$2 - e^{-U_n} - e^{U_n} = -e^{-U_n}(e^{U_n} - 1)^2$$

استنتاج أن: $2 - e^{-U_n} < e^{U_n}$

بما أن $-e^{-U_n}(e^{U_n} - 1)^2 < 0$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن: $2 - e^{-U_n} - e^{U_n} < 0$

وبالتالي: $2 - e^{-U_n} < e^{U_n}$

د) تبيان أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما:

لدينا $2-e^{-U_n} < e^{U_n}$ ومنه $\ln(2-e^{-U_n}) < U_n$

ومنه $U_{n+1} < U_n$ وبالتالي (U_n) متناقصة تماما.

استنتاج أن (U_n) متقاربة:

بما أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

3) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leftarrow P(n)$

لدينا: $\ln\left(\frac{1+1}{1}\right) = \ln 2$ و $U_1 = \ln 2$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$

نفرض أنه من أجل $n \geq 1$: $U_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ونبرهن أن $U_{n+1} = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

لدينا $U_{n+1} = \ln\left(2-e^{-U_n}\right) = \ln\left(2-e^{-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right)$

ومنه: $U_{n+1} = \ln\left(2-\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right) = \ln\left(2-\frac{n}{n+1}\right)$

ومنه $U_{n+1} = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة وبالتالي حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع

$U_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$.

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$$

4) نعتبر الجداء P حيث $P = e^{U_1} \times e^{U_2} \times \dots \times e^{U_{2021}}$

تبيان أن: $P = 2022$

لدينا: $P = e^{\ln 2} \times e^{\ln\frac{3}{2}} \times e^{\ln\frac{4}{3}} \times \dots \times e^{\ln\left(\frac{2022}{2021}\right)}$

ومنه: $P = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{2022}{2021} = 2022$

وبالتالي: $P = 2022$

حل التمرين الثاني:

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ صحيح لأنه:

الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ هي عبارة عن مركب دالتين متغايرتين في اتجاه التغير (u متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و $x \mapsto e^{x}$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$)

2) خطأ لأن:

$$H(x) = \int_1^x h(t)\,dt = \int_1^x (2t\ln t)\,dt$$

نضع $u(t) = \ln t$ و $v'(t) = 2t$ ومنه $u'(t) = \frac{1}{t}$ و $v(t) = t^2$

ومنه:

$$H(x) = \left[t^2 \ln t\right]_1^x - \int_1^x t\,dt$$

ومنه:

$$H(x) = \left[t^2 \ln t\right]_1^x - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x =$$

وبالتالي:

$$H(x) = x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

3) صحيح لأن:

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{e^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\ln(n)}{n}}{\frac{e^n}{n}} = 0$$

($\frac{\ln(n)}{n} \to 0$ ، $\frac{e^n}{n} \to +\infty$)

4) خطأ لأن: من أجل $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ فإن $-x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

و

$$g(-x) = -x - \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = -x - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

ومنه:

$$g(-x) = -x + \ln\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\right) = -x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= -\left(x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

ومنه $g(-x) = -g(x)$ وعليه الدالة g فردية وليست زوجية.

حل التمرين الثالث:

I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس:

1) حساب $P(A)$ و $P(B)$.

$$P(A)=\frac{C_4^2\times C_3^1+C_4^3}{C_7^3}=\frac{18+4}{35}=\frac{22}{35}$$

$$P(B)=\frac{C_4^2\times C_3^1+C_4^1\times C_3^2}{C_7^3}=\frac{18+12}{35}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$$

2) حساب $P(A\cap B)$:

$$P(A\cap B)=\frac{C_4^2\times C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$$

استنتاج كلا من $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$:

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{18}{35}}{\frac{22}{35}}=\frac{18}{22}=\frac{9}{11}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{22}{35}+\frac{30}{35}-\frac{18}{35}=\frac{34}{35}$$

II)

1) تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

لدينا: $X\in\{1;2;3;4\}$ ومنه:

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$P(X=1)=\frac{A_4^3}{A_7^3}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}\quad,\quad P(X=2)=\frac{3A_4^2\times A_3^1}{210}=\frac{108}{210}=\frac{18}{35}$$

$$P(X=3)=\frac{3A_4^1\times A_3^2}{210}=\frac{72}{210}=\frac{12}{35}\quad,\quad P(X=4)=\frac{A_3^3}{210}=\frac{6}{210}=\frac{1}{35}$$

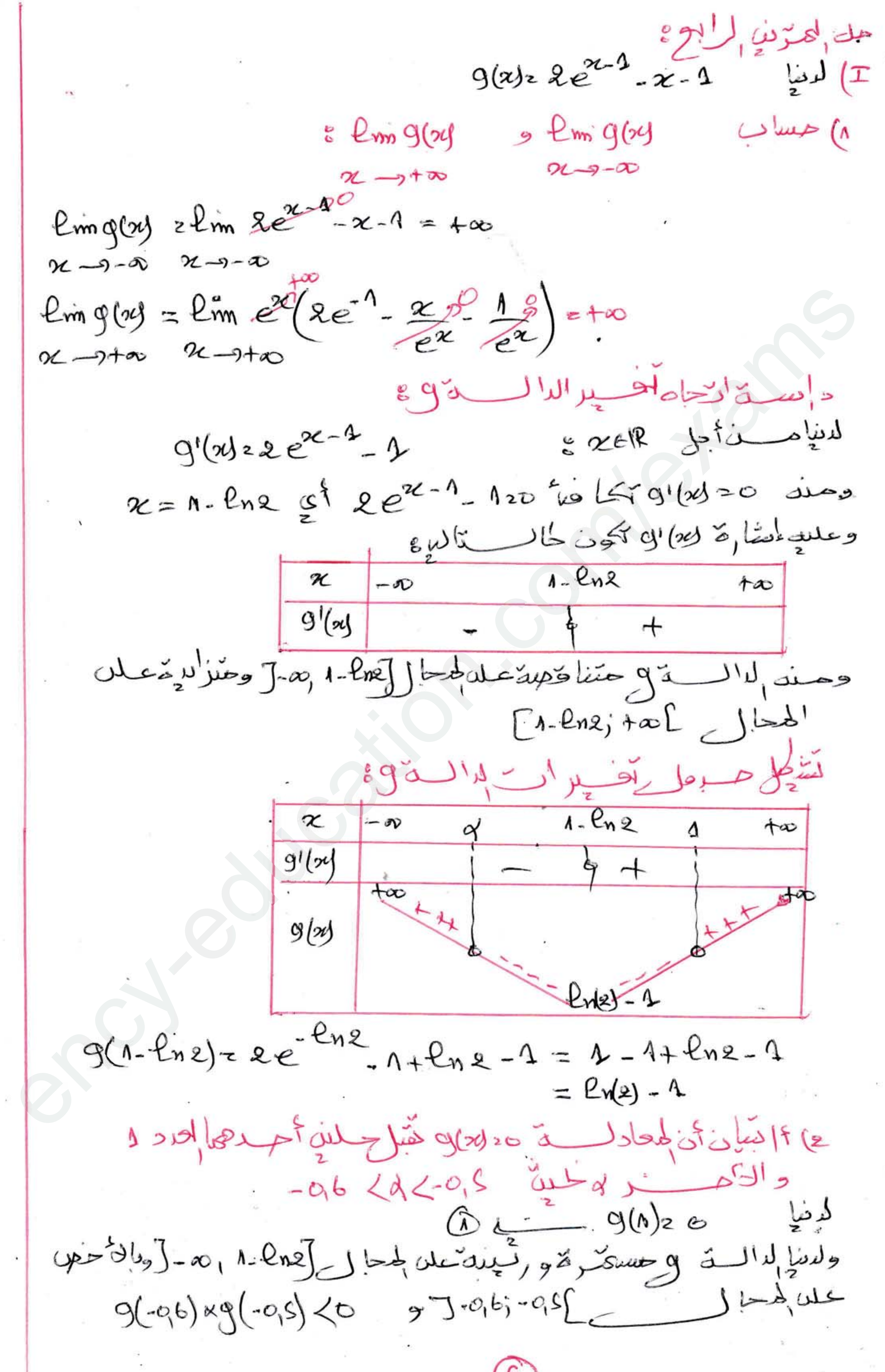
حساب $E(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}p_i x_i=\frac{4+36+36+4}{35}=\frac{80}{35}=\frac{16}{7}$$

استنتاج $E(1743X-1962)$:

$$E(1743X-1962)=1743\times E(X)-1962=1743\times\frac{16}{7}-1962$$

ومنه: $E(1743X-1962)=2022$



حل التمرين الرابع:

I) لدينا $g(x)=2e^{x-1}-x-1$

1) حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 2e^{x-1}-x-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x}\left(2e^{-1}-\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}\right)=+\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=2e^{x-1}-1$

ومنه $g'(x)=0$ يكافئ $2e^{x-1}-1=0$ أي $x=1-\ln2$

وعليه إشارة $g'(x)$ تكون كالتالي:

x	$-\infty$		$1-\ln2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty,1-\ln2]$ ومتزايدة على المجال $[1-\ln2;+\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

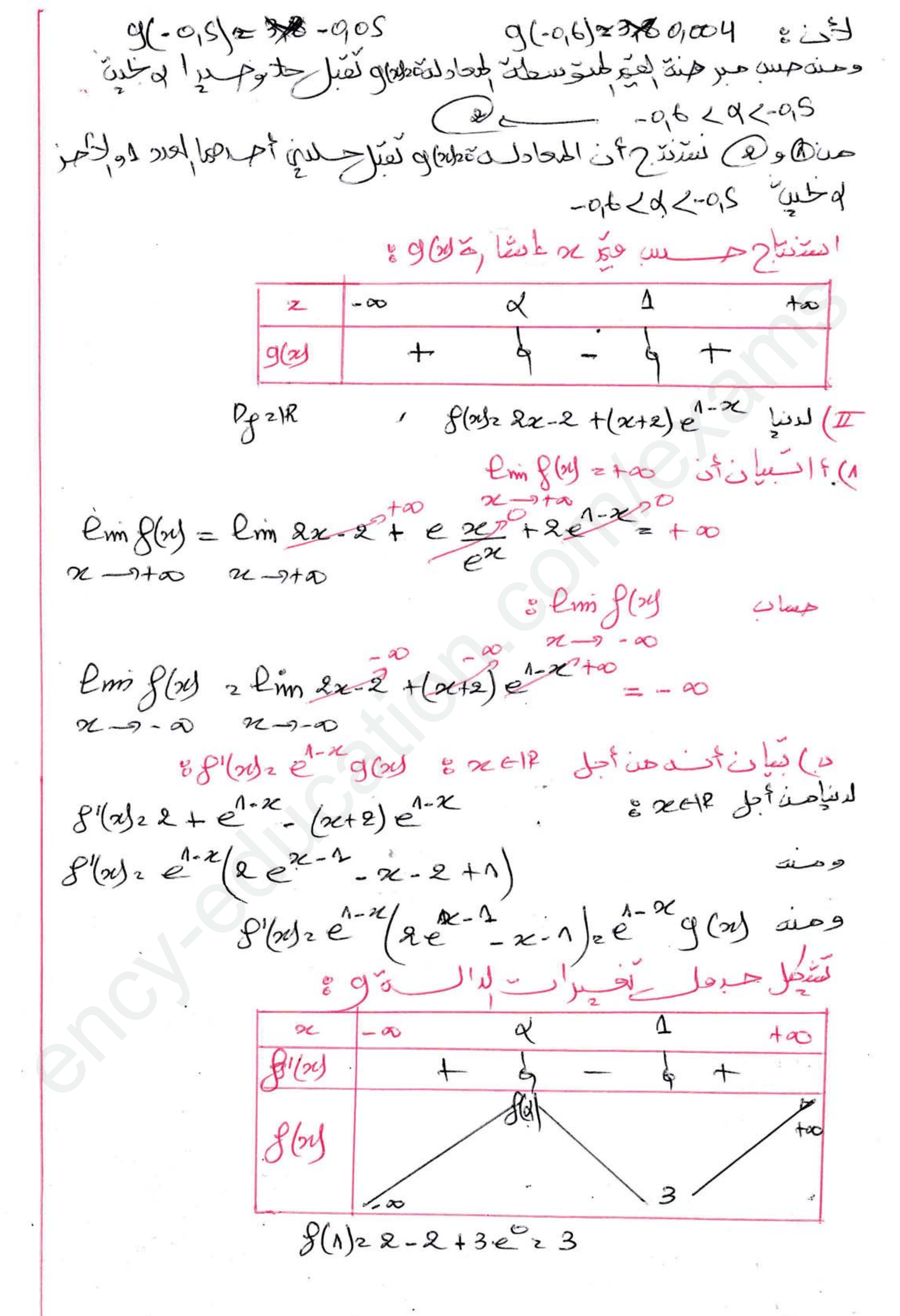
x	$-\infty$		α		$1-\ln2$		1		$+\infty$
$g'(x)$				$-$	0	$+$			
$g(x)$	$+\infty$	$+++$	0	$---$	$\ln(2)-1$	$---$	0	$+++$	$+\infty$

$$g(1-\ln2)=2e^{-\ln2}-1+\ln2-1=1-1+\ln2-1=\ln(2)-1$$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 والآخر α حيث $-0,6<\alpha<-0,5$

لدينا $g(1)=0$ .... (1)

ولدينا الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $]-\infty,1-\ln2]$ وبالأخص على المجال $]-0,6;-0,5[$ و $g(-0,6)\times g(-0,5)<0$



لأن: $g(-0,6) \approx 0,004$ ، $g(-0,5) \approx -0,05$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$-0,6 < \alpha < -0,5$ ...... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 والآخر α حيث $-0,6<\alpha<-0,5$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	0	+	

II) لدينا $f(x) = 2x-2+(x+2)e^{1-x}$ ، $D_f = \mathbb{R}$

1) أ. التبيان أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x-2 + e\frac{x}{e^x} + 2e^{1-x} = +\infty$$

حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x-2+(x+2)e^{1-x} = -\infty$$

ب) تبيان أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{1-x}g(x)$:

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=2+e^{1-x}-(x+2)e^{1-x}$

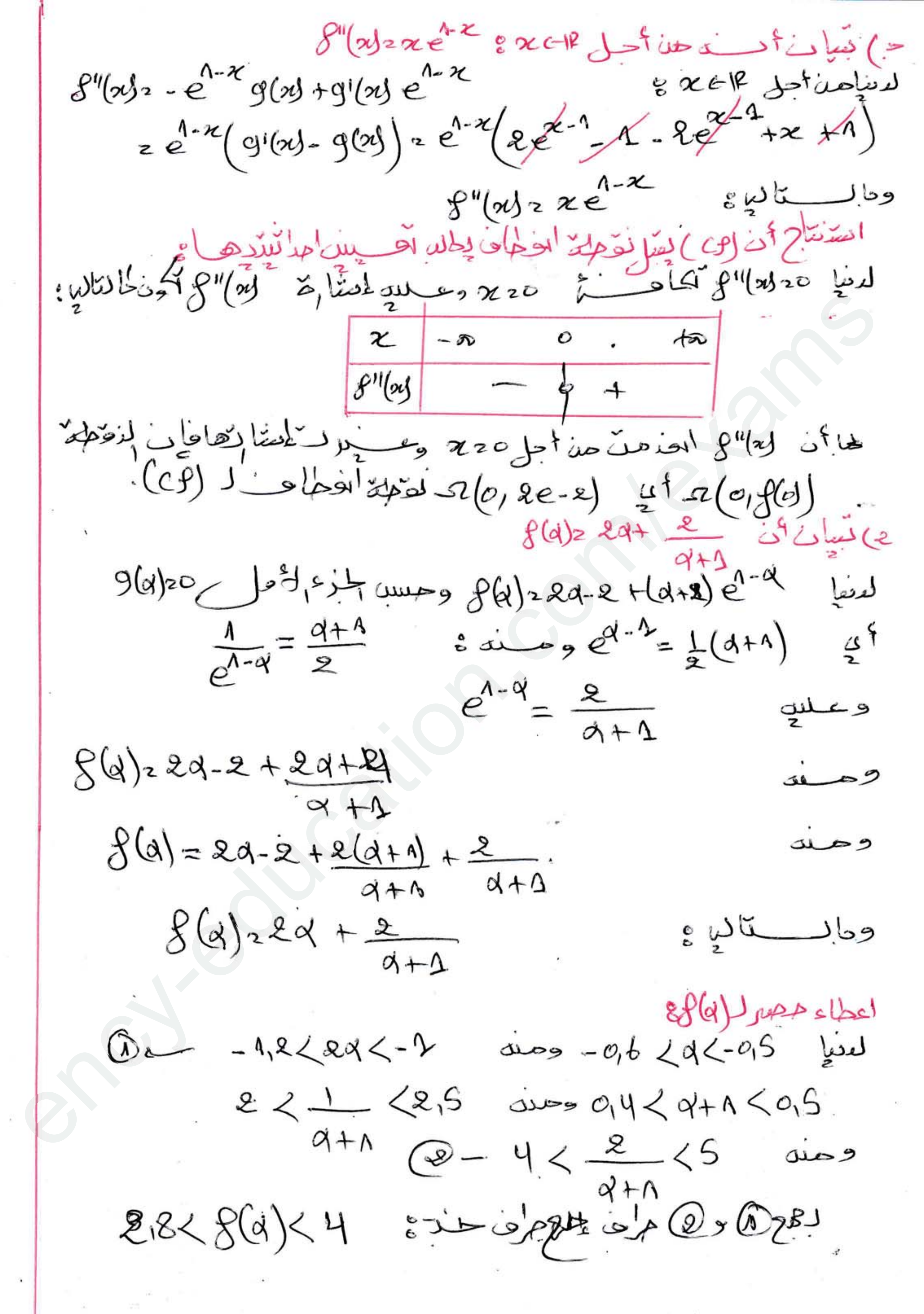
ومنه $f'(x)=e^{1-x}\left(2e^{x-1}-x-2+1\right)$

ومنه $f'(x)=e^{1-x}\left(2e^{x-1}-x-1\right)=e^{1-x}g(x)$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	3	↗	$+\infty$

$f(1)=2-2+3e^0=3$



ج) تبيان أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f''(x)=xe^{1-x}$

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f''(x)=-e^{1-x}g(x)+g'(x)e^{1-x}$

$$=e^{1-x}\left(g'(x)-g(x)\right)=e^{1-x}\left(2e^{x-1}-1-2e^{x-1}+x+1\right)$$

وبالتالي: $f''(x)=xe^{1-x}$

استنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها

لدينا $f''(x)=0$ تكافئ $x=0$ وعليه اشارة $f''(x)$ تكون كالتالي:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f''(x)$	$-$ 0 $+$

بما أن $f''(x)$ انعدمت من أجل $x=0$ وغيرت اشارتها فإن النقطة $\Omega(0,f(0))$ أي $\Omega(0,2e-2)$ نقطة انعطاف لـ (C_f).

د) تبيان أن $f(\alpha)=2\alpha+\frac{2}{\alpha+1}$

لدينا $f(\alpha)=2\alpha-2+(\alpha+2)e^{1-\alpha}$ وحسب الجزء الأول $g(\alpha)=0$

أي $e^{\alpha-1}=\frac{1}{2}(\alpha+1)$ ومنه: $\frac{1}{e^{1-\alpha}}=\frac{\alpha+1}{2}$

وعليه $e^{1-\alpha}=\frac{2}{\alpha+1}$

ومنه $f(\alpha)=2\alpha-2+\frac{2\alpha+4}{\alpha+1}$

ومنه $f(\alpha)=2\alpha-2+\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+1}+\frac{2}{\alpha+1}$

وبالتالي: $f(\alpha)=2\alpha+\frac{2}{\alpha+1}$

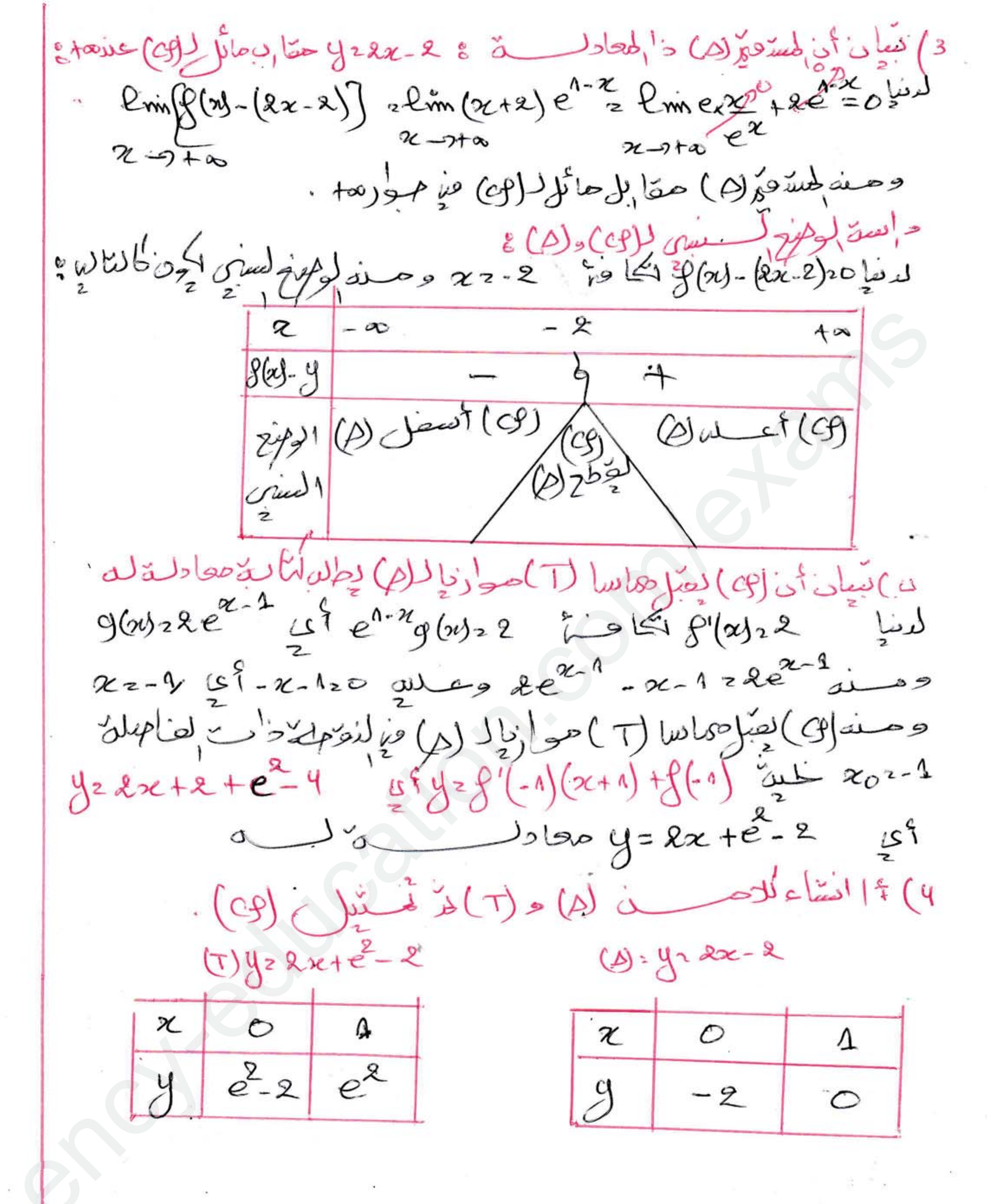
اعطاء حصر لـ $f(\alpha)$

لدينا $-0,6<\alpha<-0,5$ ومنه $-1,2<2\alpha<-1$ ...(1)

$0,4<\alpha+1<0,5$ ومنه $2<\frac{1}{\alpha+1}<2,5$

ومنه $4<\frac{2}{\alpha+1}<5$ ...(2)

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد: $2,8<f(\alpha)<4$



3) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = 2x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

لدينا: $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x-2)] = \lim_{x \to +\infty} (x+2)e^{1-x} = \lim_{x \to +\infty} e \times \frac{x}{e^x} + 2e^{1-x} = 0$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ):

لدينا $f(x) - (2x-2) = 0$ تكافئ $x = -2$ ومنه الوضع النسبي يكون كالتالي:

x	$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ $+\infty$
$f(x) - y$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
الوضع النسبي	(C_f) أسفل (Δ) $\quad$ (C_f) يقطع (Δ) $\quad$ (C_f) أعلى (Δ)

ب) تبيان أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلة له:

لدينا $f'(x) = 2$ تكافئ $e^{1-x} g(x) = 2$ أي $g(x) = 2e^{x-1}$

ومنه $2e^{x-1} - x - 1 = 2e^{x-1}$ وعليه $-x-1=0$ أي $x = -1$

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -1$ حيث $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ أي $y = 2x + 2 + e^2 - 4$

أي $y = 2x + e^2 - 2$ معادلة له.

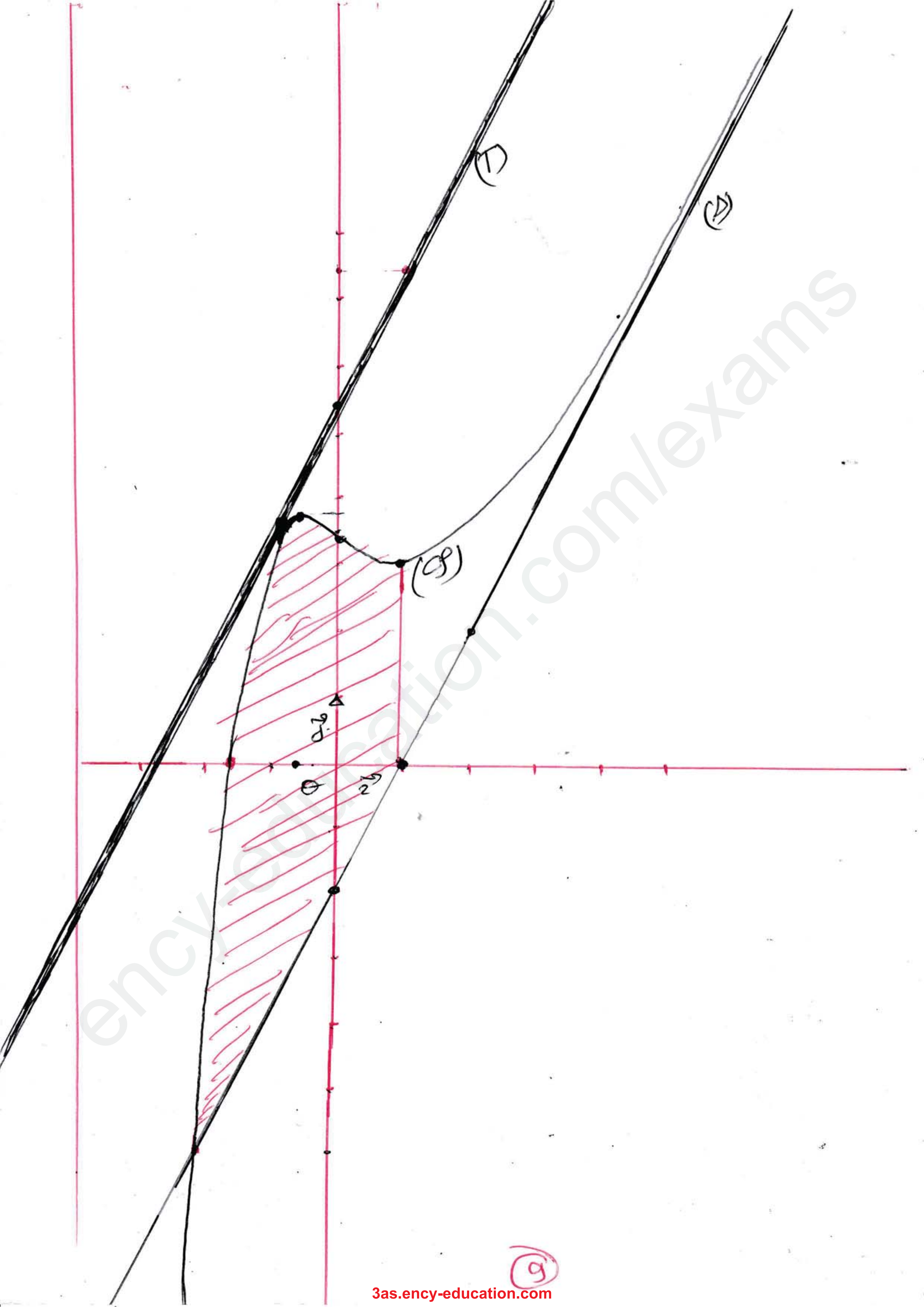
4) أ) انشاء كلا من (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f).

(T) $y = 2x + e^2 - 2$

x	0	1
y	$e^2 - 2$	e^2

(Δ): $y = 2x - 2$

x	0	1
y	-2	0


(T)
(D)
(Cf)
O
9

ن) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها المعادلة تقبل $f(x) = 2(x-1)+m$ حلين مختلفين في الإشارة:

لدينا $f(x) = 2(x-1)+m$ تكافئ $f(x) = 2x + m - 2$

ومنه من أجل $m-2 \in]-2, 2e-2[$ أي $m \in]0, 2e[$

فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

2) أ) تبيان أن الدالة H دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+2)e^{1-x}$ على $\mathbb{R}$.

لدينا $H(x) = (-x-3)e^{1-x}$

ومنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $H'(x) = -e^{1-x} - e^{1-x}(-x-3)$

ومنه $H'(x) = (x+2)e^{1-x}$ وعليه H أصلية للدالة $x \mapsto (x+2)e^{1-x}$

ب) استنتاج المساحة A:

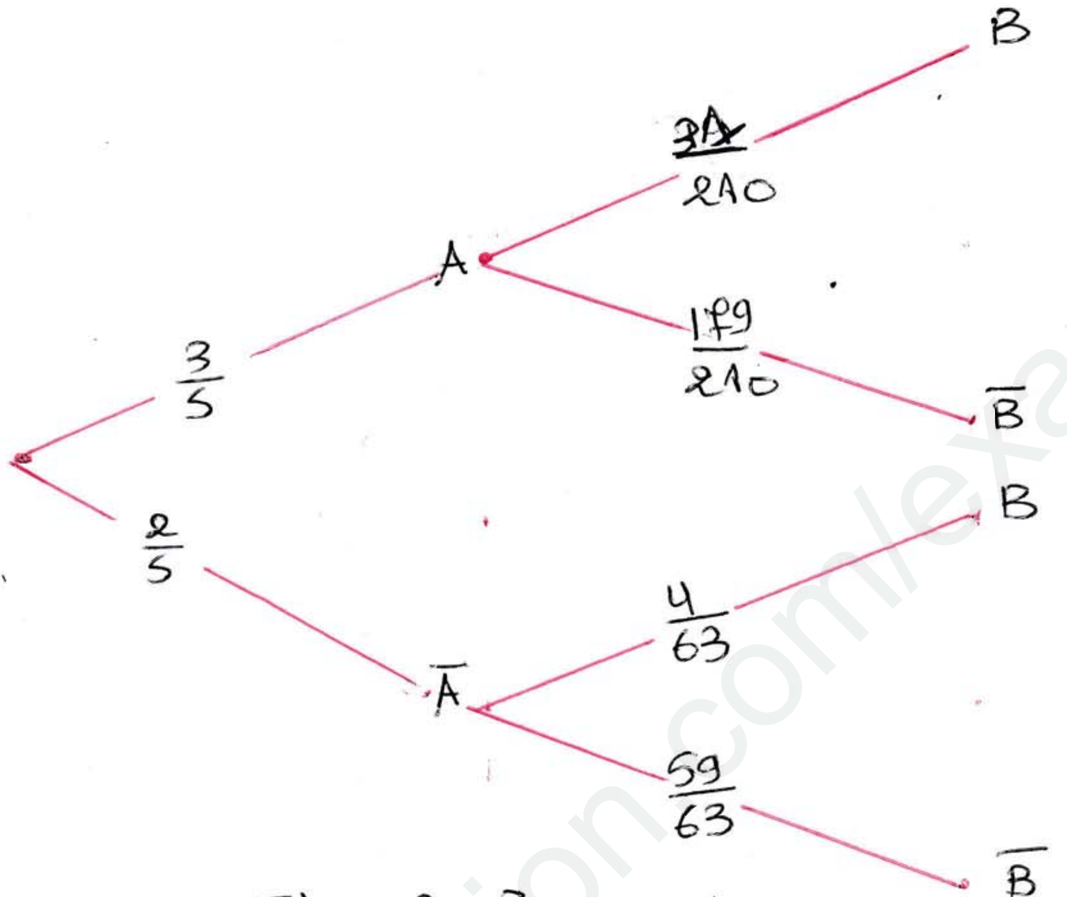
$$A = \int_{-2}^{1} (x+2)e^{1-x}\,dx = \left[H(x)\right]_{-2}^{1} = H(1) - H(-2)$$

ومنه: $A = -4 + e^3 = e^3 - 4$

الموضوع الثاني

حل التمرين الأول

1) نقل وإكمال شجرة الاحتمالات مع توضيح مراحل الحساب



$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - \frac{31}{210} = \frac{179}{210}$$

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 + C_4^2 \times C_1^1 \times C_1^1}{C_9^4} = \frac{2+6}{126} = \frac{8}{126} = \frac{4}{63}$$

$$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = 1 - \frac{4}{63} = \frac{59}{63}$$

2) استنتاج $P(B)$:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{31}{210} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{63} = \frac{31}{5 \times 70} + \frac{8}{5 \times 63}$$

$$= \frac{1953 + 560}{5 \times 70 \times 63} = \frac{2513}{22050} = \frac{359}{3150}$$

حل التمرين الثالث:

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n\sqrt{U_n} \\ U_0 = e^{-1} \end{cases}$$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < U_n < 1$ $P(n)$

لدينا $P(0)$ محققة لأن $0 < U_0 < 1$

نفرض أنه من أجل $n \geq 0$: $0 < U_n < 1$ ونبرهن أن $0 < U_{n+1} < 1$

لدينا $0 < U_n < 1$ ومنه $0 < \sqrt{U_n} < 1$ ومنه

$0 < U_n\sqrt{U_n} < 1$ وعليه $P(n+1)$ صحيحة

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $0 < U_n < 1$ من أجل $n \in \mathbb{N}$.

2) أ) إثبات أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$:

لدينا $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n\sqrt{U_n}}{U_n} = \sqrt{U_n}$ ولما أن $0 < U_n < 1$ فإن $0 < \sqrt{U_n} < 1$

وعليه $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$.

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (U_n):

لما أن $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ فإن $U_{n+1} < U_n$ لأن $U_n > 0$ ومنه

المتتالية (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) استنتاج أن المتتالية (U_n) متقاربة:

لما أن (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

حساب $\lim_{n \to +\infty} U_n$:

لما أن (U_n) متقاربة فهي تقبل نهاية منتهية ℓ تحقق $f(\ell) = \ell$ حيث f الدالة معرفة على المجال $[0;1]$ ومن أجل $x \in [0;1]$ فإن $f(x) \in [0;1]$ و $U_0 \in [0;1]$

لدينا $f(\ell) = \ell$ تكافئ $\ell\sqrt{\ell} = \ell$ تكافئ $\ell^3 = \ell^2$ وتكافئ

$\ell^3 - \ell^2 = 0$ أي $\ell^2(\ell - 1) = 0$ ومنه $\ell = 0$ أو $\ell = 1$

ولما أن (U_n) متناقصة فإن $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

II) لدينا $V_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n \ln U_n$

1) تبيان أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول:

لدينا: $V_{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\ln U_{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{1}{3}\times\ln U_n\sqrt{U_n}$

ومنه $V_{n+1}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\ln U_n^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\ln U_n$

ومنه $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$ وبالتالي (V_n) متتالية هندسية

أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول: $V_0=\left(\frac{1}{3}\right)^0\ln e^{-1}=-1$

2) كتابة V_n بدلالة n:

لدينا من أجل $n\in\mathbb{N}$: $V_n=V_0\times q^n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $U_n=e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$

لدينا $V_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\ln U_n$ ومنه $\ln U_n=\frac{V_n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ ومنه $U_n=e^{\frac{V_n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$

ومنه $U_n=e^{\frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$ ومنه $U_n=e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n=\ln U_0+\ln U_1+\dots+\ln U_n$

لدينا نضع من أجل $n\in\mathbb{N}$: $W_n=\ln U_n$

لدينا (W_n) متتالية هندسية أساسها $q'=\frac{3}{2}$ وحدها الأول $W_0=-1$

وعليه: $S_n=W_0\left(\frac{1-(q')^{n+1}}{1-q'}\right)=-\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}\right)$

ومنه $S_n=-\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}}\right)=2\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$

حل التمرين الثالث:

لدينا $f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$ ، $g(x)=\frac{1}{e^x+1}$ حيث $D_f=D_g=D=[0;\ln 2]$

1) تبيان أنه من أجل $x\in D$: $\frac{1}{3}\leq g(x)\leq\frac{1}{2}$

لدينا $x\in D$ معناه $0\leq x\leq\ln 2$ ومنه $1\leq e^x\leq 2$ ومنه

$2\leq e^x+1\leq 3$ ومنه $\frac{1}{3}\leq\frac{1}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}$ وبالتالي من أجل

$x\in D$ فإن: $\frac{1}{3}\leq g(x)\leq\frac{1}{2}$

اعطاء حصر للتكامل J :

لدينا $\frac{1}{3}\leq g(x)\leq\frac{1}{2}$ من أجل $x\in D$ ومنه $\int_0^{\ln 2}\frac{1}{3}dx\leq J\leq\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}dx$

وعليه $\left[\frac{1}{3}x\right]_0^{\ln 2}\leq J\leq\left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\ln 2}$ ومنه

$\frac{1}{3}\ln 2\leq J\leq\frac{1}{2}\ln 2$ وبالتالي $\ln\sqrt[3]{2}\leq J\leq\ln\sqrt{2}$

2) اثبات أن: $I-J=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx$:

لدينا: $I-J=\int_0^{\ln 2}f(x)dx-\int_0^{\ln 2}g(x)dx=\int_0^{\ln 2}(f(x)-g(x))dx$

ومنه $I-J=\int_0^{\ln 2}\left[\frac{e^{2x}}{e^x+1}-\frac{1}{e^x+1}\right]dx=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$

ومنه $I-J=\int_0^{\ln 2}\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{(e^x+1)}dx=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx$

استنتاج A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) المستقيمين: $x=0$ ، $x=\ln 2$

لدينا من أجل $x\in D$ $f(x)-g(x)\geq 0$ ومنه

$A=I-J=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx=\left[e^x-x\right]_0^{\ln 2}$

ومنه $A=2-\ln 2-1=(1-\ln 2)u.a$

3) أ/ التحقق أنه من أجل $x \in D$: $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x+1}$

لدينا $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+1} = \frac{e^{2x}+e^x-e^x}{e^x+1} = \frac{e^x(e^x+1)}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x+1}$

ومنه من أجل $x \in D$: $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x+1}$

حساب التكامل I :

لدينا $I = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx = \int_0^{\ln 2} \left(e^x - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = \left[e^x - \ln(e^x+1)\right]_0^{\ln 2}$

ومنه $I = 2 - \ln 3 - 1 + \ln 2 = 1 + \ln 2 - \ln 3$

وبالتالي $I = 1 + \ln\frac{2}{3}$

ب) استنتاج قيمة التكامل J :

لدينا $I - J = 1 - \ln 2$ ومنه $J = I - 1 + \ln 2$

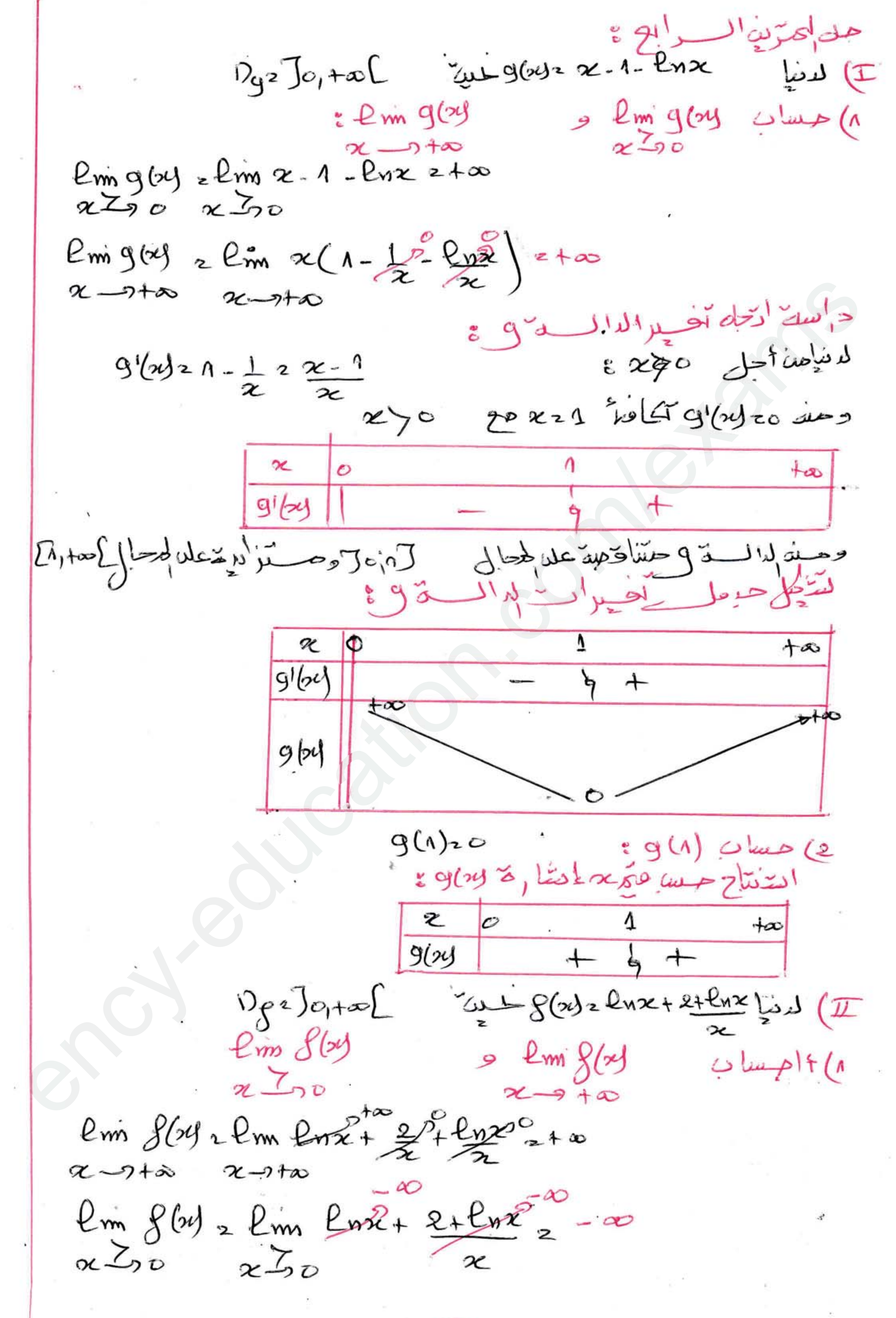
ومنه $J = 1 + \ln\frac{2}{3} - 1 + \ln 2$

وبالتالي : $J = \ln\frac{2}{3} + \ln 2 = \ln\frac{4}{3}$

تفسير النتيجة هندسية :

بما أنه من أجل $x \in D$: $g(x) > 0$ نجد $J = \ln\frac{4}{3}$

فإن مساحة الحيز المحدد بـ (C_g) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\ln 2$ هي $\ln\frac{4}{3}\,u.a$



حل التمرين الرابع :

I) لدينا $g(x)=x-1-\ln x$ حيث $D_g=]0,+\infty[$

1) حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0} x-1-\ln x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا من أجل $x>0$: $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

ومنه $g'(x)=0$ تكافئ $x=1$ مع $x>0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة على المجال $]0,1]$ ومتزايدة على المجال $[1,+\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2) حساب $g(1)$: $g(1)=0$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

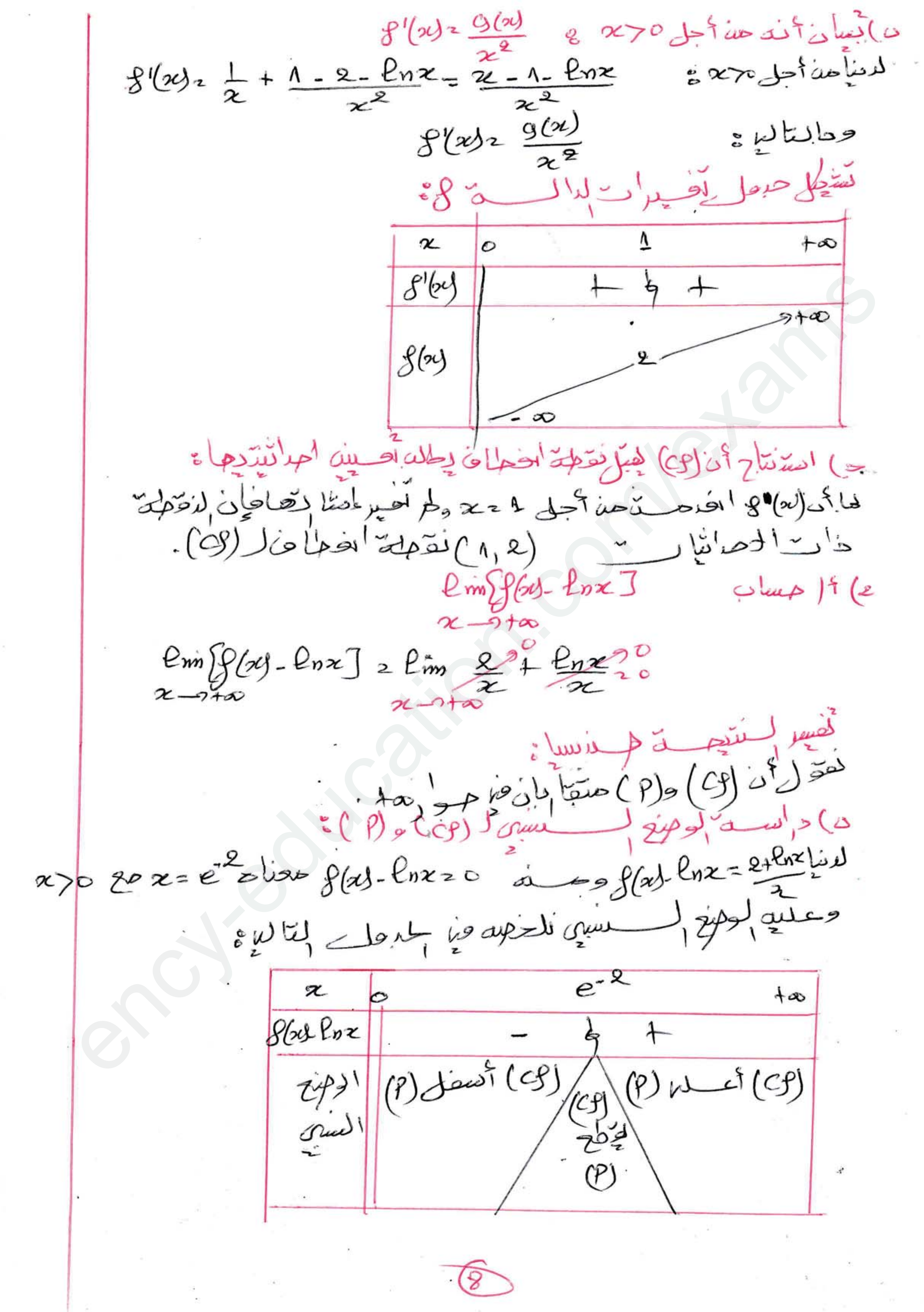
x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

II) لدينا $f(x)=\ln x+\frac{2+\ln x}{x}$ حيث $D_f=]0,+\infty[$

1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \ln x+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0} \ln x+\frac{2+\ln x}{x}=-\infty$$



ب) تبيان أنه من أجل $x>0$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

لدينا من أجل $x>0$: $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1-2-\ln x}{x^2}=\frac{x-1-\ln x}{x^2}$

وبالتالي: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

ج) استنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتيها:

بما أن $f'(x)$ انعدمت من أجل $x=1$ ولم تغير إشارتها فإن النقطة ذات الاحداثيات $(1,2)$ نقطة انعطاف ل (C_f).

4) أ) حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}=0$$

تفسير النتيجة هندسيا:

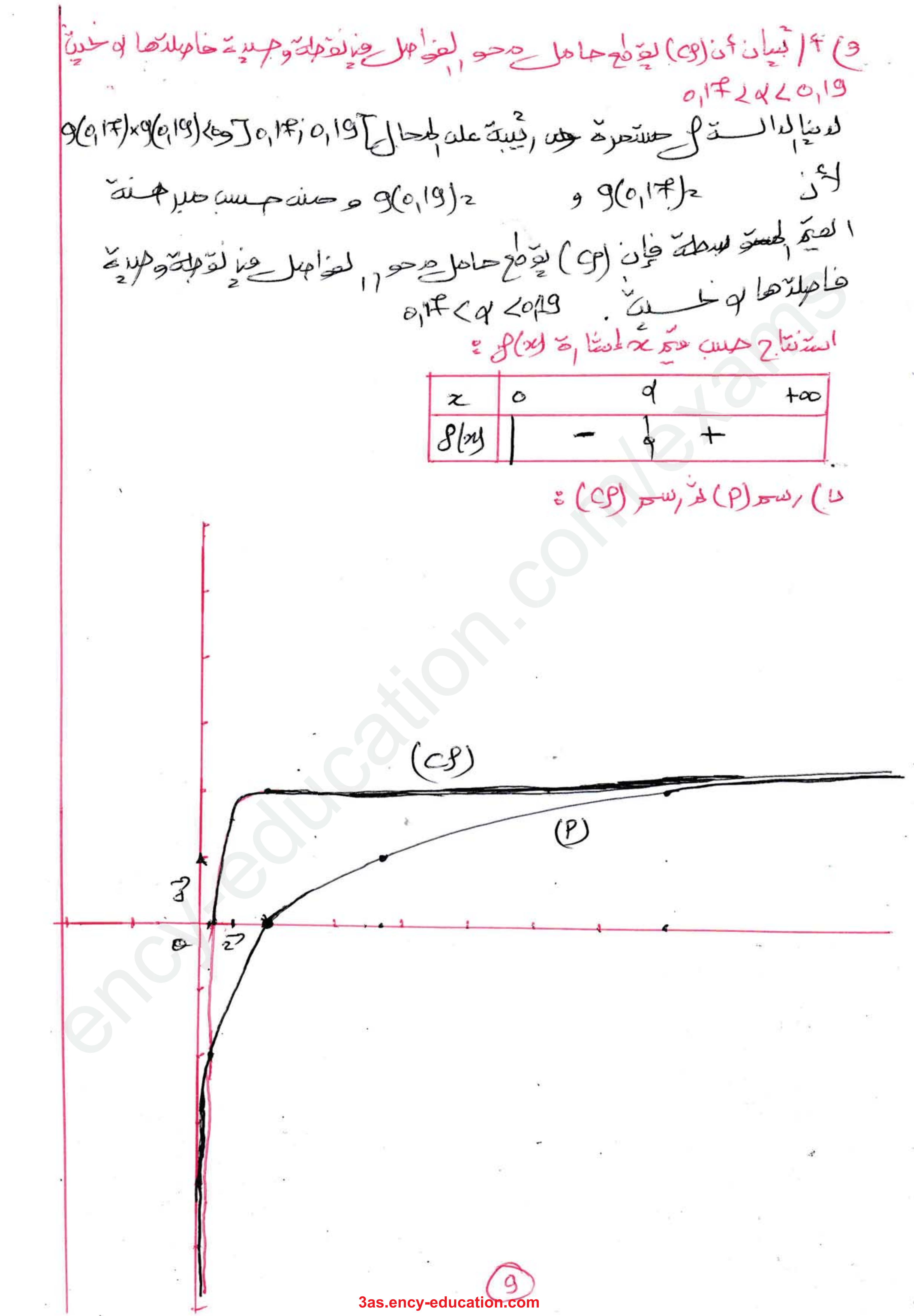
نقول أن (C_f) و (P) متقاربان بجوار $+\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي ل (C_f) و (P) :

لدينا $f(x)-\ln x=\frac{2+\ln x}{x}$ ونضع $f(x)-\ln x=0$ معناه $x=e^{-2}$ مع $x>0$

وعليه الوضع النسبي نلخصه في الجدول التالي:

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$f(x)-\ln x$	||	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	||	(C_f) أسفل (P)	(C_f) يقطع (P)	(C_f) أعلى (P)	



3) 4) تبيان أن (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,17 < \alpha < 0,19$

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]0,17 ; 0,19[$ و $g(0,17) \times g(0,19) < 0$

لأن $g(0,17) =$ و $g(0,19) =$ و منه حسب مبرهنة

القيم المتوسطة فإن (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة

فاصلتها α حيث $0,17 < \alpha < 0,19$.

استنتاج حسب قيم x إشارة $f(x)$:

x	0 α $+\infty$
$f(x)$	‖ $-$ 0 $+$

5) رسم (P) ثم رسم (Cf) :

4) دراسة اتجاه تغير الدالة h المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ:

$h(x)=[f(x)]^2$

لدينا من أجل $x>0$: $h'(x)=2f'(x)f(x)$

ومنه إشارة $h'(x)$ تكون كالتالي:

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

ومنه الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0,\alpha]$

ومتزايدة على المجال $[\alpha,+\infty[$.